



第二章

一元二次函数、方程和不等式

2.1 等式性质与不等式性质



基础上分

1. **D** 【解析】由题意可知, 另一段绳子的长度为 $(5-x)$ m.

因为两段绳子长度之差不小于 1 m, 所以

$$\begin{cases} |x-(5-x)| \geq 1, \\ 0 < x < 5, \end{cases} \text{ 化简得 } \begin{cases} |2x-5| \geq 1, \\ 0 < x < 5. \end{cases} \text{ 故}$$

选 D.

2. $8(x+19) > 2\,200 (x > 0)$ $\frac{8x}{x-12} > 9 (x > 12)$

【解析】由题意知, 如果每天行驶的路程比原来多 19 km, 那么在 8 天内它的行程就超过 2 200 km, 即 $8(x+19) > 2\,200 (x > 0)$.

如果每天行驶的路程比原来少 12 km, 那么它原来行驶 8 天的路程就得花 9 天多的

时间, 即 $\frac{8x}{x-12} > 9 (x > 12)$.

3. **A** 【解析】由 $c < d$, 得 $-c > -d$, 又 $a > b$, 则由不等式的同向可加性得 $a-c > b-d$, 所以充分性成立;

由 $a-c > b-d$, 得 $a-b > c-d$, 且 $a > b$, 此时无法确定 $c-d$ 的符号, 必要性不成立. 所以“ $c < d$ ”是“ $a-c > b-d$ ”的充分不必要条件.

故选 A.

4. **ACD** 【解析】对于 A, 因为 $a > b > 0$,

$$\text{所以 } ab > 0, \frac{a}{ab} > \frac{b}{ab} > 0,$$

$$\text{即 } \frac{1}{b} > \frac{1}{a} > 0,$$

$$\text{所以 } -\frac{1}{b} < -\frac{1}{a} < 0, \text{ 即 } -\frac{1}{a} > -\frac{1}{b}, \text{ 故 A}$$

正确;

对于 B, 因为 $c < d < 0$, 所以 $c^2 > cd > 0$, 故 B 错误;

对于 C, $c < d < 0$, 即 $0 > d > c$,

又因为 $a > b > 0$,

所以 $a+d > b+c$, 故 C 正确;

对于 D, 因为 $c^2 > 0, a > b > 0$,

所以 $ac^2 > bc^2$, 故 D 正确.

故选 ACD.

5. **C** 【解析】对于 A, 当 $c < 0$ 时, 由 $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ 及

不等式性质得 $a < b$, 故 A 错误;

对于 B, 若 $ac^2 \geq bc^2$, 当 $c = 0$ 时, a, b 大小关系无法确定, 故 B 错误;

对于 C, 若 $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$, 则 $c \neq 0$, 所以 $c^2 > 0$, 不



等式两边同乘 c^2 , 得 $ac < bc$, 故 C 正确;

对于 D, 取 $a = -2, b = -1$, 满足 $a < b < 0$, 但 $a^2 > b^2$, 故 D 错误. 故选 C.

6. C 【解析】因为 $-1 < x < 4, 2 < y < 3$, 所以 $-3 < 3x < 12, 4 < 2y < 6$, 所以 $1 < 3x + 2y < 18$. 故选 C.

7. BCD 【解析】对于 A, 令 $a = 2, b = \frac{1}{2}$, 则

$a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b}$, 故 A 错误;

对于 B, 因为 $m > n > 0, \frac{m+1}{n+1} - \frac{m}{n} = \frac{n-m}{n(n+1)} <$

0 , 所以 $\frac{m+1}{n+1} < \frac{m}{n}$, 故 B 正确;

对于 C, 由 $c > a > b > 0$, 得 $-a < -b < 0$, 则 $0 < c -$

$a < c - b$, 每项同乘 $\frac{1}{(c-a)(c-b)}$, 得 $0 < \frac{1}{c-b} <$

$\frac{1}{c-a}$, 又 $a > b > 0$, 所以 $\frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-b}$, 故 C 正确;

对于 D, 若 $a \geq b > -1$, 则 $a+1 \geq b+1 > 0$, 所以

$a(1+b) = a+ab \geq b+ab = b(1+a)$, 所以 $\frac{a}{1+a} \geq \frac{b}{1+b}$, 故 D 正确. 故选 BCD.

8. A < C < B 【解析】因为 $A = \sqrt{n^2+1} - n =$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} < \frac{1}{2n} = C,$$

提示: 分子有理化

$$B = n - \sqrt{n^2-1} = \frac{1}{n + \sqrt{n^2-1}} > \frac{1}{2n} = C,$$

所以 $A < C < B$.

9. 3 【解析】(1) 若 $ab > 0, bc > ad$, 则 $\frac{c}{a} > \frac{d}{b}$.

推理如下: 因为 $ab > 0, bc > ad$, 所以不等式

$bc > ad$ 两边同时除以 ab , 得 $\frac{bc}{ab} > \frac{ad}{ab}$, 即 $\frac{c}{a} >$

$\frac{d}{b}$, 所以该命题为真命题.

(2) 若 $ab > 0, \frac{c}{a} > \frac{d}{b}$, 则 $bc > ad$. 推理如下:

因为 $\frac{c}{a} > \frac{d}{b}, ab > 0$, 所以 $\frac{c}{a} \cdot ab > \frac{d}{b} \cdot ab$,

即 $bc > ad$, 所以该命题为真命题.

(3) 若 $bc > ad, \frac{c}{a} > \frac{d}{b}$, 则 $ab > 0$.

推理如下:

因为 $\frac{c}{a} > \frac{d}{b}$, 所以 $\frac{c}{a} - \frac{d}{b} = \frac{bc-ad}{ab} > 0$.

因为 $bc > ad$, 所以 $bc-ad > 0$, 所以 $ab > 0$, 所

以该命题为真命题.

综上, 组成的 3 个命题都是真命题.



对点上分

1. A 【解析】因为 $M-N = x^2 + y^2 + 1 - 2x - 2y + 2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + 1 > 0$, 所以 $M > N$. 故



选 A.

2. D 【解析】当 $a = -\frac{1}{4}, b = -\frac{1}{2}$ 时, $a = \frac{b}{2}$, $a^2 < b^2$, A, B 错误;

当 $a = 1, b = -1$ 时, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, C 错误;

$a - b^2 - (b - a^2) = a^2 - b^2 + (a - b) = (a - b)(a + b + 1) > 0$, D 正确.

故选 D.

3. C 【解析】 $\because P = \sqrt{a} + \sqrt{a+5}, Q = \sqrt{a+2} + \sqrt{a+3} (a \geq 0), \therefore P > 0, Q > 0$,

$\therefore P^2 = 2a + 5 + 2\sqrt{a(a+5)} = 2a + 5 + 2\sqrt{a^2 + 5a}$,

$Q^2 = 2a + 5 + 2\sqrt{(a+2)(a+3)} = 2a + 5 + 2\sqrt{a^2 + 5a + 6}$.


$\because 0 \leq a^2 + 5a < a^2 + 5a + 6, \therefore \sqrt{a^2 + 5a} < \sqrt{a^2 + 5a + 6}, \therefore P^2 < Q^2, \therefore P < Q$. 故选 C.

4. > 【解析】(作商法) $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{7}}{3-\sqrt{3}} =$

$\frac{\sqrt{7}(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{7}(3+\sqrt{3})}{6} > \frac{2 \times 3}{6} = 1$, 即

$\frac{a}{b} > 1$. 因为 $a > 0, b > 0$, 所以 $a > b$.

一题多解 (平方法) 由题意知 $a > 0, b > 0, a^2 = 7, b^2 = 12 - 6\sqrt{3}$, 且 $a^2 - b^2 = 6\sqrt{3} - 5 > 0$, 所以 $a > b$.

5.  **思路导引** (1) 只需根据题设得出不等式并拓展运用即可; (2) 区分两人购买方式的差别, 列出各自的平均价格, 用作差法比较大小.

(1) 【证明】由糖水变甜了得出不等式 $\frac{a}{b} <$

$\frac{a+m}{b+m} (b > a > 0, m > 0)$.

设 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a, b, c , 则有 $a + b > c, a + c > b, b + c > a$,

由上述不等式可得 $\frac{c}{a+b} < \frac{c+c}{a+b+c}, \frac{a}{b+c} <$

$\frac{a+a}{a+b+c}, \frac{b}{a+c} < \frac{b+b}{a+b+c}$,

即 $\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} < \frac{c+c}{a+b+c} + \frac{a+a}{a+b+c} +$

$\frac{b+b}{a+b+c} = 2$, 所以 $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2$.

(2) 【解】小东买到的糖的平均价格比较高.

证明如下: 对于小东而言, 他买到的糖的平均价格为 $\frac{p_1 + p_2}{2}$ 元/千克,

对于小华而言, 设小华买两种糖的费用均



为 c 元, 则他买到的糖的总质量为

$\left(\frac{c}{p_1} + \frac{c}{p_2}\right)$ 千克, 故小华买到的糖的平均

价格为 $\frac{2c}{\frac{c}{p_1} + \frac{c}{p_2}} = \frac{2p_1p_2}{p_1+p_2}$ 元/千克.

因为 $\frac{p_1+p_2}{2} - \frac{2p_1p_2}{p_1+p_2} = \frac{(p_1-p_2)^2}{2(p_1+p_2)} > 0$, 所以小东买到的糖的平均价格较高.

6. B 【解析】因为 $b < a < -3b$, 所以 $b < 0$, 则有

$\frac{1}{b} < 0$, 又 $b < a < -3b$, 所以可得 $-3 < \frac{a}{b} < 1$, 所

以 $0 \leq \left| \frac{a}{b} \right| < 3$. 故选 B.

7. AB 【解析】对于 A, 由题意 $a = \frac{1}{5}[(a+2b)+2(2a-b)]$, 因为 $-2 < 2(2a-b) < 8$, $-3 < a+2b < 2$,

所以 $-5 < (a+2b)+2(2a-b) < 10$, 所以 $-1 < a < 2$, 即 a 的取值范围是 $\{a | -1 < a < 2\}$, 故 A 正确.

对于 B, $b = \frac{1}{5}[2(a+2b)-(2a-b)]$, 因为 $-6 < 2(a+2b) < 4$, $-4 < -(2a-b) < 1$, 所以 $-10 < 2(a+2b)-(2a-b) < 5$, 所以 $-2 < b < 1$, 即 b 的取值范围是 $\{b | -2 < b < 1\}$, 故 B 正确.


对于 C, 设 $a+b = m(a+2b) + n(2a-b) = (m+2n)a + (2m-n)b$,

则 $\begin{cases} m+2n=1, \\ 2m-n=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=\frac{3}{5}, \\ n=\frac{1}{5}, \end{cases}$ 则 $a+b =$

$\frac{3}{5}(a+2b) + \frac{1}{5}(2a-b)$,


因为 $-\frac{9}{5} < \frac{3}{5}(a+2b) < \frac{6}{5}$, $-\frac{1}{5} < \frac{1}{5}(2a-b) < \frac{4}{5}$,

所以 $-\frac{9}{5} - \frac{1}{5} < a+b = \frac{3}{5}(a+2b) + \frac{1}{5}(2a-b) < \frac{6}{5} + \frac{4}{5}$, 即 $-2 < a+b < 2$, 故 C 错误.

 **易错**: 本题不能单独求 a, b 范围, 再求目标范围

对于 D, 因为 $-3 < a+2b < 2$, $-1 < 2a-b < 4$, 所以 $0 \leq (a+2b)^2 < 9$, $0 \leq (2a-b)^2 < 16$,

所以 $a^2+b^2 = \frac{1}{5}[(a+2b)^2 + (2a-b)^2] \in \{a^2+b^2 | 0 \leq a^2+b^2 < 5\}$,

 **提示**: 此处需要观察出 $a+2b$, $2a-b$ 平方后再相加可消掉 ab 项, 将条件中的两个式子整体处理, 不能先分别求 a^2, b^2 的范围, 再求 a^2+b^2 的范围, 这样会超出

**正确范围**

故不存在 a, b , 使得 $a^2 + b^2 = 6$, 故 D 错误.
 故选 AB.

一题多解

对于 C, 设 $p = a + 2b$, $q = 2a - b$, 则 $a = \frac{p+2q}{5}$, $b = \frac{2p-q}{5}$, 所以 $a + b = \frac{3p+q}{5}$, 又 $-3 < p < 2$, $-1 < q < 4$, 所以 $-2 < a + b < 2$, 故 C 错误.

8.

**思路导引**

(1) 由 $-3 < b < 2$, 得 $-2 < -b < 3$, 注意 a, b 间也有大小关系限制; (2) 首先设 $3a - 2b = m(a + b) + n(a - b) = (m + n)a + (m - n)b$, 求出 m, n 的值, 再让两个不等式相加可得结果.

【解】(1) 因为 $-3 < a < b < 2$, 即 $-3 < a < 2$, $-3 < b < 2$,

所以 $-2 < -b < 3$, 所以 $-5 < a - b < 5$.

又 $a < b$, 所以 $-5 < a - b < 0$, 即 $a - b$ 的取值范围是 $\{a - b | -5 < a - b < 0\}$.

(2) 方法一: 设 $3a - 2b = m(a + b) + n(a - b) = (m + n)a + (m - n)b$, 所以 $\begin{cases} m + n = 3, \\ m - n = -2, \end{cases}$ 解

得 $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{5}{2}$.

因为 $1 \leq a + b \leq 5$, $-1 \leq a - b \leq 3$, 所以 $\frac{1}{2} \leq$

$\frac{1}{2}(a + b) \leq \frac{5}{2}$, $-\frac{5}{2} \leq \frac{5}{2}(a - b) \leq \frac{15}{2}$.

因为 $3a - 2b = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{5}{2}(a - b)$, 所以 $-2 \leq 3a - 2b \leq 10$, 即 $3a - 2b$ 的取值范围是 $\{3a - 2b | -2 \leq 3a - 2b \leq 10\}$.

方法二: 设 $m = a + b$, $n = a - b$, 则 $a = \frac{m+n}{2}$, $b = \frac{m-n}{2}$, 且 $1 \leq m \leq 5$, $-1 \leq n \leq 3$, 则 $-2 \leq 3a - 2b = \frac{m+5n}{2} \leq 10$, 即 $3a - 2b$ 的取值范围是 $\{3a - 2b | -2 \leq 3a - 2b \leq 10\}$.

易错警示

利用不等式性质求范围时忽略变量关系致错

本题第(1)问的易错点是“忽略变量本身的大小关系”, 求两变量的差的取值范围时, 要注意两变量本身是否具备大小关系, 如此题忽略题干中 $a < b$ 这一大小关系, 易得到 $-5 < a - b < 5$.

本题第(2)问的易错点是“忽略变量间范围的制约关系”, 利用不等式求某个代数式(特别是涉及两个或两个以上未知量的代数式)的取值范



围时,往往需要利用不等式的“同向可加性”,但是这种转化不是等价变形,如果解题过程中多次使用这种转化,就有可能扩大了所求代数式的取值范围. 本题第(2)问题干中每个不等式中 a, b 不是相互独立的,是相互制约的,即 b 随着 a 的变化而变化.

**综合上分**

9. 【解】(1)是,理由如下:

因为 $3 \times 10 < 4 \times 8$, 所以 $(3, 4)$ 是 $(8, 10)$ 的“下位序列”.

(2) 因为 (a, b) 是 (c, d) 的“下位序列”, 所以 $ad < bc$, 因为 a, b, c, d 均为正数,

$$\text{所以 } \frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{(a+c)b - a(b+d)}{(b+d)b} =$$

$$\frac{bc - ad}{(b+d)b} > 0, \text{ 即 } \frac{a+c}{b+d} > \frac{a}{b},$$

$$\text{同理 } \frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} = \frac{(a+c)d - c(b+d)}{(b+d)d} =$$

$$\frac{ad - bc}{(b+d)d} < 0, \text{ 即 } \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d},$$

$$\text{所以 } \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

2.2 基本不等式**基础上分**

1. A 【解析】由题意知 $a > 0, b > 0$, 则可知

$$a^2 + b^2 \geq 2ab,$$

当 $ab > 1$ 时, $a^2 + b^2 \geq 2ab > 2$, 即充分性成立;

$$\text{取 } a = 3, b = \frac{1}{4}, \text{ 满足 } a > 0, b > 0, a^2 + b^2 = 9 + \frac{1}{16} > 2,$$

$$\text{但是 } ab = \frac{3}{4} < 1, \text{ 即必要性不成立,}$$

故“ $ab > 1$ ”是“ $a^2 + b^2 > 2$ ”的充分不必要条件.

2. B 【解析】选项 A 不满足“取等号时的条件”, 故不正确; 选项 C 不满足“各项必须为正”, 故不正确; 选项 D, 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$,

$$2x + \frac{1}{x} = - \left[(-2x) + \left(-\frac{1}{x} \right) \right] \leq$$

$$-2\sqrt{(-2x) \cdot \left(-\frac{1}{x} \right)} = -2\sqrt{2}, \text{ 当且仅当}$$

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时取等号, 故 } 2x + \frac{1}{x} \text{ 的最大值为 } -$$

$2\sqrt{2}$, 故不正确. 故选 B.

**易错警示** 忽视基本不等式的使用条件

使用基本不等式时要注意使用条件“一正、二定、三相等”，不是正数的时候应考虑提出负号或者用配凑等方法转化为正数，符号不定时要分类讨论，如果取等号时的变量值不能取到，那么这个最值就取不到。

3. A 【解析】 $a^2+b^2 \geq 2ab$ ，当且仅当 $a=b$ 时

等号成立，即 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \sqrt{ab}$ ，

但 $a \neq b$ ，则 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > \sqrt{ab}$ ，

因为 $a^2+b^2 \geq 2ab$ ，所以 $2(a^2+b^2) \geq a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$ ，即 $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ，

故 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$ ，当且仅当 $a=b$ 时等号成立，

但 $a \neq b$ ，则 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > \frac{a+b}{2}$ ，

由基本不等式可得 $\frac{2ab}{a+b} \leq \frac{2 \times \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{a+b} = \frac{a+b}{2}$ ，

当且仅当 $a=b$ 时等号成立，

但 $a \neq b$ ，则 $\frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2}$ ，

故选项中的式子中，最大的为 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 。

故选 A.

规律总结 基本不等式延伸，当 $a>0$ ，

$$b>0 \text{ 时， } \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq$$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \text{，当且仅当 } a=b \text{ 时等号成立。}$$

4. $m>n$ 【解析】因为 $a>2$ ，所以 $a-2>0$ ，

又因为 $m = a + \frac{1}{a-2} = (a-2) + \frac{1}{a-2} + 2$ ，

所以 $m \geq 2\sqrt{(a-2) \cdot \frac{1}{a-2}} + 2 = 4$ ，当且仅

当 $a=3$ 时取等号，

由 $b \neq 0$ ，得 $b^2>0$ ，

所以 $n = 2 - b^2 < 2 < 4 \leq m$ ，

故答案为 $m>n$ 。

5. C 【解析】因为 $a>\frac{1}{2}$ ，则 $a-\frac{1}{2}>0$ ，

所以 $a + \frac{2}{2a-1} = \left(a - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{a - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \geq$

$$2\sqrt{\left(a - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{a - \frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}，$$



当且仅当 $a - \frac{1}{2} = \frac{1}{a - \frac{1}{2}}$ ($a > \frac{1}{2}$), 即当 $a =$

$\frac{3}{2}$ 时, 等号成立,

故 $a + \frac{2}{2a-1}$ 的最小值为 $\frac{5}{2}$.

故选 C.

6. B 【解析】令 $t = a - 1, t > 0$, 则 $a = t + 1$, 所以

$$\frac{a^2 - 6a + 6}{1 - a} = -\frac{(t+1)^2 - 6(t+1) + 6}{t} =$$

$$-\frac{t^2 - 4t + 1}{t} = -\left(t + \frac{1}{t}\right) + 4 \leq -2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} +$$

$4 = 2$, 当且仅当 $t = 1$, 即 $a = 2$ 时取等号. 故

选 B.

7. D 【解析】 $2xy \leq \left(\frac{2x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 所以 $xy \leq$

$\frac{1}{8}$, 当且仅当 $2x = y$, 即 $x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{2}$ 时取

等号. 故选 D.

8. C 【解析】 $\because 2x + y = xy, x > 0, y > 0, \therefore \frac{2}{y} +$

$$\frac{1}{x} = 1, \therefore 1 = \frac{2}{y} + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{\frac{2}{xy}} \Rightarrow xy \geq 8$$
 (当

且仅当 $\frac{2}{y} = \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$, 即 $x = 2, y = 4$ 时取等

号); $x + 2y = (x + 2y) \left(\frac{2}{y} + \frac{1}{x}\right) = 5 + \frac{2x}{y} +$

$$\frac{2y}{x} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{2x}{y} \cdot \frac{2y}{x}} = 9$$
 (当且仅当 $\frac{2x}{y} =$

$$\frac{2y}{x}$$
, 即 $x = 3, y = 3$ 时取等号).

综上, xy 和 $x + 2y$ 的最小值分别为 8 和 9.

故选 C.

一题多解

当 $x > 0, y > 0$ 时, 由 $2x + y = xy \geq 2\sqrt{2xy}$, 解得 $xy \geq 8$, 当且仅当 $2x = y$, 即 $x = 2, y = 4$ 时取等号.

9. C 【解析】因为正实数 x, y 满足 $x^2 + 3xy -$

$$2 = 0$$
, 所以 $y = \frac{2}{3x} - \frac{x}{3}$, 则 $4x + 3y = 4x + \frac{2}{x} -$

$$x = 3x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{6}$$
, 当且仅当 $3x = \frac{2}{x}$, 即 $x =$

$$\frac{\sqrt{6}}{3}$$
 时, 等号成立, 所以 $4x + 3y$ 的最小值为

$2\sqrt{6}$. 故选 C.

10. $4\sqrt{3}$ 【解析】由题意可知 $p = 6 = \frac{a+b+c}{2} =$

$$4 + \frac{c}{2}$$
, 则 $c = 4$, 所以 $S =$

$$\sqrt{6(6-a)(6-b)(6-4)} = 2\sqrt{3} \times$$

$$\sqrt{(6-a)(6-b)} \leq 2\sqrt{3} \times \frac{(6-a) + (6-b)}{2} =$$

$4\sqrt{3}$, 当且仅当 $a = b = 4$ 时取等号.



11. 【证明】因为 a, b 都是正实数, 且 $a+b=1$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) &= \left(1 + \frac{a+b}{a}\right) \\ \left(1 + \frac{a+b}{b}\right) &= \left(2 + \frac{b}{a}\right) \left(2 + \frac{a}{b}\right) = 5 + 2 \\ \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) &\geq 5 + 4\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 9, \text{ 当且仅} \\ \text{当 } a=b=\frac{1}{2} \text{ 时, 等号成立.} \end{aligned}$$

12. 【证明】由 a, b, c 都是正数, 利用基本不等式可知 $b^2+c^2 \geq 2bc$, 当且仅当 $b=c$ 时, 等号成立;

$c^2+a^2 \geq 2ac$, 当且仅当 $a=c$ 时, 等号成立;

$a^2+b^2 \geq 2ab$, 当且仅当 $a=b$ 时, 等号成立.

所以 $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2) \geq a \cdot 2bc + b \cdot 2ca + c \cdot 2ab = 6abc$, 当且仅当 $a=b=c$ 时, 等号成立.

易错警示

多次使用基本不等式时, 要注意各不等式取等号的条件是否一致.

13. A



思路导引

根据已知将问题化为 $m < 1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2}$ 恒成立, 应用基本不等式求 $1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2}$ 的最小值, 即可得参数范围.

【解析】由 $b > 0$, 得 $m < \frac{1}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} - \frac{2b}{a}$ 恒成立. 又由 $a+b=1$, 可得 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 1$, 所以 $m < \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} - \frac{2b}{a} = 1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2}$ 恒成立, 即 $m < \left(1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2}\right)_{\min}$.

提示: 这里运用了“齐次化”的思路, 使得分子、分母的次数相同

$1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \geq 1 + 2\sqrt{\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2}{b^2}} = 3$, 当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号, 所以 $m < 3$. 故选 A.

14. $\frac{2}{3}$ 【解析】因为对任意 $x > 0$, 不等式

$\frac{a}{x} \geq \frac{2}{x^2-x+4}$ 恒成立, 即不等式 $a \geq$

$\frac{2}{x+\frac{4}{x}-1}$ 恒成立, 所以对任意 $x > 0$, a

$\geq \left(\frac{2}{x+\frac{4}{x}-1}\right)_{\max}$.



$$\text{而 } \frac{2}{x + \frac{4}{x} - 1} \leq \frac{2}{2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x} - 1}} = \frac{2}{3}, \text{ 当且仅}$$

当 $x=2$ 时取等号, 则 $a \geq \frac{2}{3}$, 所以 a 的最小值是 $\frac{2}{3}$.

15. C 【解析】由题意可知, 行车的总费用

$$\text{为 } y = \left[56 + 8 \left(3 + \frac{x^2}{360} \right) \right] \cdot \frac{200}{x} = \frac{16\,000}{x} + \frac{160x}{36}, \text{ 其中 } 50 \leq x \leq 100, \text{ 由基本不等式可}$$

$$\text{得 } y = 160 \left(\frac{100}{x} + \frac{x}{36} \right) \geq 160 \times 2$$

$$\sqrt{\frac{100}{x} \cdot \frac{x}{36}} = \frac{1\,600}{3}, \text{ 当且仅当 } \frac{100}{x} = \frac{x}{36}$$

($50 \leq x \leq 100$), 即 $x=60$ 时, 等号成立, 因此, 最经济的车速是 60 km/h . 故选 C.

16. 【解】(1) 依题意可得 $\triangle CDQ \sim \triangle PBC$, 所

$$\text{以 } \frac{DQ}{DC} = \frac{BC}{BP}, \text{ 即 } \frac{x}{30} = \frac{20}{BP}, \text{ 可得 } BP = \frac{600}{x}, \text{ 因}$$

$$\text{此 } AP = AB + BP = 30 + \frac{600}{x}.$$

又要求 AP 的长不小于 40 m 且不大于

$$90 \text{ m}, \text{ 即 } 40 \leq 30 + \frac{600}{x} \leq 90, \text{ 解得 } 10 \leq x \leq$$

$$60, \text{ 即 } AP = 30 + \frac{600}{x}, 10 \leq x \leq 60.$$

$$(2) \text{ 易知 } AQ = AD + DQ = 20 + x, \text{ 所以 } S = \frac{1}{2}$$

$$AP \cdot AQ = \frac{1}{2} \left(30 + \frac{600}{x} \right) (20 + x) =$$

$$\frac{1}{2} \left(600 + 30x + \frac{12\,000}{x} + 600 \right).$$

$$\text{由基本不等式可得 } \frac{1}{2} \left(600 + 30x + \frac{12\,000}{x} \right.$$

$$\left. + 600 \right) \geq \frac{1}{2} \left(1\,200 + \right.$$

$$\left. 2\sqrt{30x \cdot \frac{12\,000}{x}} \right) = \frac{1}{2} (1\,200 + 2 \times$$

$$600) = 1\,200, \text{ 当且仅当 } 30x = \frac{12\,000}{x}, \text{ 即}$$

$x=20$ 时, 等号成立, 此时 S 取得最小值 $1\,200$.

因此当 $DQ=20 \text{ m}$ 时, S 取得最小值, 最小值为 $1\,200 \text{ m}^2$.



对点上分

1. B 【解析】因为 $x > 1$, 所以 $2 - 3x - \frac{4}{x-1} =$

$$-1 - \left[3(x-1) + \frac{4}{x-1} \right] \leq -1 -$$

$$2\sqrt{3(x-1) \cdot \frac{4}{x-1}} = -1 - 4\sqrt{3}, \text{ 当且仅当}$$



$3(x-1) = \frac{4}{x-1}$, 即 $x = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立,

所以 $2-3x - \frac{4}{x-1}$ 的最大值是 $-4\sqrt{3}-1$. 故

选 B.

2. ACD 【解析】对于 A, $a(1-a) \leq \left[\frac{a+(1-a)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}$, 当且仅当 $a = 1-a$, 即 $a = \frac{1}{2}$ 时等号成立, 故 A 正确;

对于 B, 取 $a = 1, b = -1$, 可得

$$\left(a + \frac{1}{a}\right) \left(b + \frac{1}{b}\right) = 2 \times (-2) = -4 < 4, \text{ 故 B}$$

错误;

对于 C, $a^2 + b^2 \geq 2ab$, 当且仅当 $a = b$ 时等号成立, $a^2 + c^2 \geq 2ac$, 当且仅当 $a = c$ 时等号成立, $b^2 + c^2 \geq 2bc$, 当且仅当 $b = c$ 时等号成立, 所以 $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2ab + 2bc + 2ac$, 当且仅当 $a = b = c$ 时等号成立, 所以 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$, 故 C 正确;

对于 D, 因为 $ab > 0$, 所以 $\frac{a}{b} > 0, \frac{b}{a} > 0$, 所

以 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2$, 当且仅当

$a = b \neq 0$ 时等号成立, 故 D 正确. 故选 ACD.

3. A 【解析】令 $m = 2x + 5y, n = x - 2y$, 由题意知 $x > 2y > 0$, 且 $x + y = 1$, 得 $m > 0, n > 0$, 且 $m +$

$$n = 3x + 3y = 3, \text{ 则 } \frac{9}{2x+5y} + \frac{1}{x-2y} = \frac{9}{m} + \frac{1}{n} =$$

$$\frac{3(m+n)}{m} + \frac{m+n}{3n} = \frac{3n}{m} + \frac{m}{3n} + \frac{10}{3} \geq 2$$

$$\sqrt{\frac{3n}{m} \cdot \frac{m}{3n}} + \frac{10}{3} = \frac{16}{3}, \text{ 当且仅当 } \frac{3n}{m} = \frac{m}{3n}, \text{ 即}$$

$$\begin{cases} m = \frac{9}{4}, \\ n = \frac{3}{4} \end{cases} \text{ 时等号成立, 此时 } \begin{cases} x = \frac{11}{12}, \\ y = \frac{1}{12}, \end{cases} \text{ 故}$$

选 A.

4. B 【解析】因为 $a > 0, b > 0$, 所以 $a + b > 0$.

不等式 $\frac{m}{a+b} \leq \frac{4a+9b}{ab}$ 恒成立, 即 $m \leq$

$$\frac{4a+9b}{ab} \cdot (a+b) \text{ 恒成立.}$$

$$\frac{4a+9b}{ab} \cdot (a+b) = \left(\frac{4}{b} + \frac{9}{a}\right)(a+b) = 13 +$$

$$\frac{4a}{b} + \frac{9b}{a} \geq 13 + 2\sqrt{\frac{4a}{b} \cdot \frac{9b}{a}} = 25, \text{ 当且仅当}$$

$$\frac{4a}{b} = \frac{9b}{a}, \text{ 即 } b = \frac{2}{3}a \text{ 时等号成立, 所以 } m \leq$$

25, 即实数 m 的最大值为 25. 故选 B.

5. C 【解析】由 $x + y = 1, x, y > 0$, 可得 $(x+1) +$

$$(y+2) = 4, \text{ 所以 } \frac{1}{x+1} + \frac{4}{y+2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+1} +$$



$$\frac{4}{y+2} \Big) [(x+1) + (y+2)] =$$

$$\frac{1}{4} \left[\frac{y+2}{x+1} + \frac{4(x+1)}{y+2} + 5 \right] \geq \frac{1}{4} (2\sqrt{4} + 5) =$$

$$\frac{9}{4}, \text{ 当且仅当 } \frac{y+2}{x+1} = \frac{4(x+1)}{y+2}, \text{ 即 } \begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ 时}$$

$$\text{等号成立, 所以 } m + \frac{9}{2} > \frac{9}{4}, \text{ 解得 } m > -\frac{9}{4}.$$

故选 C.

6. AB 【解析】因为 $ab > 0, a+2b=6$, 所以 $a > 0, b > 0$.

对于 A, 因为 $a > 0, b > 0, a+2b=6$,

$$\text{所以 } 6 = a+2b \geq 2\sqrt{a \cdot 2b}, \text{ 可得 } ab \leq \frac{9}{2},$$

$$\text{当且仅当 } a=2b, \text{ 即 } a=3, b=\frac{3}{2} \text{ 时取等号,}$$

故 A 正确.

对于 B, 因为 $a > 0, b > 0, a+2b=6$,

$$\text{所以 } \frac{a+2b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + (2b)^2}{2}}, \text{ 即 } 3 \leq$$

$$\sqrt{\frac{a^2 + 4b^2}{2}}, \text{ 故 } a^2 + 4b^2 \geq 18,$$

$$\text{当且仅当 } a=2b, \text{ 即 } a=3, b=\frac{3}{2} \text{ 时取等号,}$$

故 B 正确.

对于 C, 因为 $a > 0, b > 0, a+2b=6$,

$$\text{所以 } \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \right) (a+2b) =$$

$$\frac{1}{6} \left(5 + \frac{2b}{a} + \frac{2a}{b} \right) \geq \frac{1}{6} \left(5 + \right.$$

$$\left. 2\sqrt{\frac{2b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} \right) = \frac{3}{2},$$

$$\text{当且仅当 } \frac{2b}{a} = \frac{2a}{b}, \text{ 即 } a=b=2 \text{ 时取等号, 故}$$

C 错误.

对于 D, 令 $a+1=x > 0, 2b+1=y > 0$, 所以 $a = x-1, 2b = y-1$, 且 $x+y=8$,

$$\text{于是 } \frac{a^2}{a+1} + \frac{4b^2}{2b+1} = \frac{(x-1)^2}{x} + \frac{(y-1)^2}{y} = x+y +$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 4 = x+y + \frac{x+y}{xy} - 4 = \frac{8}{xy} + 4 \geq$$

$$\frac{8}{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2} + 4 = \frac{9}{2},$$

$$\text{当且仅当 } x=y=4, \text{ 即 } a=3, b=\frac{3}{2} \text{ 时取等}$$

号, 故 D 错误. 故选 AB.

**一题多解**

对于 B, 由柯西不等式得

$$(a^2 + 4b^2)(1^2 + 1^2) \geq (a+2b)^2 = 6^2 = 36,$$

因此 $a^2 + 4b^2 \geq \frac{36}{2} = 18$, 当且仅当 $a =$ $2b$ 且 $a+2b=6$, 即 $a=3, b=\frac{3}{2}$ 时取等

号, 故 B 正确.

对于 C, 由权方和不等式得 $\frac{1}{a} + \frac{4}{2b} =$

$$\frac{1^2}{a} + \frac{2^2}{2b} \geq \frac{(1+2)^2}{a+2b} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2},$$

当且仅当 $\frac{1}{a} = \frac{2}{2b}$ 且 $a+2b=6$, 即 $a =$ $b=2$ 时取等号, 故 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值为 $\frac{3}{2}$, 故 C 错误.对于 D, 由权方和不等式得 $\frac{a^2}{a+1} +$

$$\frac{4b^2}{2b+1} = \frac{a^2}{a+1} + \frac{(2b)^2}{2b+1} \geq \frac{(a+2b)^2}{(a+1)+(2b+1)} =$$

$$\frac{6^2}{a+2b+2} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}, \text{ 当且仅当 } \frac{a}{a+1} =$$

$$\frac{2b}{2b+1}, \text{ 且 } a+2b=6, \text{ 即 } a=3, b=\frac{3}{2} \text{ 时取}$$

等号, 故 $\frac{a^2}{a+1} + \frac{4b^2}{2b+1}$ 的最小值为 $\frac{9}{2}$, 故

D 错误.

7. ABD 【解析】对于 A, $a+b+c \leq |a+b+c| =$

$$\sqrt{(a+b+c)^2} = \sqrt{1+2ab+2bc+2ca} \leq$$

$$\sqrt{1+a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2} = \sqrt{3}, \text{ 当且仅当 } a =$$

 $b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时取等号, 故 A 正确.

$$\text{对于 B, } 1 = a^2 + b^2 + c^2 = b^2 + \frac{1}{2}c^2 + a^2 + \frac{1}{2}c^2 \geq$$

$$\sqrt{2}bc + \sqrt{2}ca, \text{ 则 } bc + ca \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 当且仅当 } a =$$

$$b = \frac{\sqrt{2}}{2}c = \frac{1}{2} \text{ 或 } a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}c = -\frac{1}{2} \text{ 时取等号,}$$

故 B 正确.

$$\text{对于 C, 由 } (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab +$$

$$bc + ca) \geq 0, \text{ 得 } ab + bc + ca \geq -\frac{1}{2}, \text{ 当且仅当}$$

$$a+b+c=0 \text{ 时取等号, 取 } a=\frac{\sqrt{6}}{3}, b=c=-\frac{\sqrt{6}}{6},$$

$$\text{则 } ab + bc + ca = -\frac{1}{2}, \text{ 故 C 错误.}$$

$$\text{对于 D, } a, b, c \in (0, 1), 1 - c^2 = a^2 + b^2 \geq 2ab,$$

$$\text{则 } \frac{1}{ab} \geq \frac{2}{1-c^2}, \text{ 当且仅当 } a=b \text{ 时取等号, 于}$$



$$\text{是 } \frac{1}{abc} + \frac{1}{ab} = \frac{1}{ab} \left(\frac{1}{c} + 1 \right) \geq \frac{2}{1-c^2} \cdot \frac{1+c}{c} =$$

$$\frac{2}{(1-c)c} \geq \frac{2}{\left(\frac{1-c+c}{2} \right)^2} = 8, \text{ 当且仅当 } a=b, c =$$

$\frac{1}{2}$ 时取等号, 因此当 $a=b=\frac{\sqrt{6}}{4}, c=\frac{1}{2}$ 时,

$\frac{1}{abc} + \frac{1}{ab}$ 取得最小值 8, 故 D 正确. 故

选 ABD.

方法技巧

在运用基本不等式时, 要特别注意“拆”“拼”“凑”等技巧, 使其满足基本不等式的“一正、二定、三相等”的条件.

8. $16\sqrt{5}$ 【解析】设该小城的长、宽分别为

$a, b, 1500 \text{ 步} = 5 \text{ 里}, 1200 \text{ 步} = 4 \text{ 里}$, 则 $4 =$

$$\frac{\frac{a}{2} \times \frac{b}{2}}{5}, \text{ 即 } ab = 80, \text{ 故周长为 } 2(a+b) \geq 4$$

$\sqrt{ab} = 16\sqrt{5}$, 当且仅当 $a=b=4\sqrt{5}$ 时等号成立.



综合上分

9. 3 【解析】由题意可知 $h > 0$, 且 $h \leq \frac{1}{x}$,

$$h \leq \frac{5x+y}{x+y},$$

由不等式的性质可得 $h^2 \leq \frac{5x+y}{x(x+y)} =$

$$\frac{(x+y)+4x}{x(x+y)} = \frac{1}{x} + \frac{4}{x+y},$$

提示: 此处用到了不等式的同正

同向可乘性, 避免讨论 $\frac{1}{x}, \frac{5x+y}{x+y}$ 的大小

$$\text{而 } \frac{1}{x} + \frac{4}{x+y} = \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{x+y} \right) [x + (x+y)] = 5 +$$

$$\frac{x+y}{x} + \frac{4x}{x+y} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{x+y}{x} \cdot \frac{4x}{x+y}} = 9,$$

提示: 观察分母的关系, 其和为

1, 联想“1”的代换

$$\text{当且仅当 } \begin{cases} \frac{x+y}{x} = \frac{4x}{x+y}, \\ 2x+y=1, \\ x>0, y>0, \end{cases} \text{ 即 } x=y=\frac{1}{3} \text{ 时, 等号}$$

成立,

则 $h^2 \leq 9$,

又因为 $h > 0$, 所以 $0 < h \leq 3$,

故 h 的最大值为 3.

**专题上分 2 利用基本不****等式解决最值及范围问题****1. A****思路导引**

先变形得到 $a+b = \frac{1}{a} + \frac{2}{b}$, 故 $(a+b)^2 = (a+b) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b}\right)$, 利用基本不等式求出最小值.

【解析】 由 $ab-1 = \frac{a}{a+b}$, 得 $ab = \frac{a}{a+b} + 1 = \frac{2a+b}{a+b}$, 即 $a+b = \frac{2a+b}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{2}{b}$. 因为 $a>0$, $b>0$, 所以 $\frac{b}{a}>0$, $\frac{2a}{b}>0$, 则 $(a+b)^2 = (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b}\right) = 3 + \frac{b}{a} + \frac{2a}{b} \geq 3 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} = 3 + 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{2a}{b}$, 即 $a=1, b=\sqrt{2}$ 时取等号, 所以 $a+b \geq \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1$, 故 $(a+b)_{\min} = \sqrt{2}+1$. 故选 A.

2. B **【解析】** 由 $m>0, n>0, m+n=3$, 得 $6 = (m+2) + (n+1) \geq 2\sqrt{(m+2)(n+1)}$, 当且仅当 $m+2=n+1$, 即 $m=1, n=2$ 时取等号,

因此 $\sqrt{m+2} + \sqrt{n+1} = \sqrt{(\sqrt{m+2} + \sqrt{n+1})^2} = \sqrt{6+2\sqrt{(m+2)(n+1)}} \leq 2\sqrt{3}$, 所以 $\sqrt{m+2} + \sqrt{n+1}$ 的最大值为 $2\sqrt{3}$. 故选 B.

3. D **【解析】** 因为 $ab=2$, 所以 $\frac{(a-1)^2 + (b+1)^2}{a-b} = \frac{a^2 + b^2 + 2 - 2a + 2b}{a-b} = \frac{a^2 + b^2 + ab}{a-b} - 2 = \frac{(a-b)^2 + 3ab}{a-b} - 2 = (a-b) + \frac{6}{a-b} - 2$. 因为 $a>b$, 所以 $a-b>0$, 所以由基本不等式可得 $\frac{(a-1)^2 + (b+1)^2}{a-b} = (a-b) + \frac{6}{a-b} - 2 \geq 2\sqrt{6} - 2$, 当且仅当

$$\begin{cases} ab=2, \\ a-b=\sqrt{6}, \text{ 即} \\ a>b, \end{cases} \begin{cases} a=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{14}}{2}, \\ b=\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{14}}{2} \end{cases}$$

$$\text{或} \begin{cases} a=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{2}, \\ b=\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{14}}{2} \end{cases} \text{ 时, 等号成立.}$$



综上所述, $\frac{(a-1)^2+(b+1)^2}{a-b}$ 的最小值为

$2\sqrt{6}-2$. 故选 D.

4. $4\sqrt{2}+3$ 【解析】因为 $xy-y=x+3$, 且 $x>1$,

$$\text{所以 } y = \frac{x+3}{x-1},$$

$$\text{所以 } x+2y = x+2 \times \frac{x+3}{x-1} = x+2 \times \frac{x-1+4}{x-1} = x+2 \times$$

$$\left(1 + \frac{4}{x-1}\right) = x + \frac{8}{x-1} + 2 = (x-1) + \frac{8}{x-1} + 3,$$

因为 $x>1$, 所以 $x-1>0$,

$$\text{所以 } (x-1) + \frac{8}{x-1} + 3 \geq 2\sqrt{(x-1) \times \frac{8}{x-1}} +$$

$$3 = 4\sqrt{2} + 3, \text{ 当且仅当 } x-1 = \frac{8}{x-1}, \text{ 即 } x =$$

$2\sqrt{2}+1$ 时, 等号成立.

5. $5\sqrt{2}$ 【解析】因为 $m>n>0$, 所以 $m+n>$

$$0, m-n>0, m + \frac{9}{m+n} + \frac{4}{m-n} = \frac{1}{2}(m+n) +$$

$$\frac{9}{m+n} + \frac{1}{2}(m-n) + \frac{4}{m-n}.$$

$$\text{因为 } \frac{1}{2}(m+n) + \frac{9}{m+n} \geq$$

$$2\sqrt{\frac{1}{2}(m+n) \cdot \frac{9}{m+n}} = 3\sqrt{2}, \text{ 当且仅当}$$

$$\frac{1}{2}(m+n) = \frac{9}{m+n}, \text{ 即 } m+n = 3\sqrt{2} \text{ 时, 等号}$$

成立.

$$\frac{1}{2}(m-n) + \frac{4}{m-n} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}(m-n) \cdot \frac{4}{m-n}} =$$

$$2\sqrt{2}, \text{ 当且仅当 } \frac{1}{2}(m-n) = \frac{4}{m-n}, \text{ 即 } m-n =$$

$$2\sqrt{2} \text{ 时, 等号成立, 所以 } m + \frac{9}{m+n} + \frac{4}{m-n} \geq 3$$

$$\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}, \text{ 当且仅当}$$

$$\begin{cases} m+n=3\sqrt{2}, \\ m-n=2\sqrt{2}, \end{cases} \text{ 即 } m = \frac{5\sqrt{2}}{2}, n = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时, 等号成}$$

$$\text{立, 所以 } m + \frac{9}{m+n} + \frac{4}{m-n} \text{ 的最小值为 } 5\sqrt{2}.$$

6. B



思路导引

将代数式 $x+2y$ 与 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2y}\right)$ 相乘, 展开后利用基本不等式可求得 $x+2y$ 的最小值.

【解析】因为 $x, y \in (0, +\infty)$, 且满足 $\frac{1}{x} +$

$$\frac{1}{2y} = 2, \text{ 所以 } x+2y = \frac{1}{2}(x+2y) \cdot$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2y}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2y}{x} + \frac{x}{2y}\right) \geq \frac{1}{2}\left(2 +$$

$$2\sqrt{\frac{2y}{x} \cdot \frac{x}{2y}}\right) = 2, \text{ 当且仅当}$$



$$\begin{cases} \frac{x}{2y} = \frac{2y}{x}, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = 2, \\ x > 0, y > 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x = 1, \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ 时, 等号成立, 因此}$$

$x+2y$ 的最小值为 2. 故选 B.

快解

由权方和不等式可得 $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} =$

$$2 \geq \frac{(1+1)^2}{x+2y} = \frac{4}{x+2y}, \text{ 即 } x+2y \geq 2, \text{ 当且}$$

$$\text{仅当 } \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{2y}, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = 2, \\ x > 0, y > 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x = 1, \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ 时, 等号}$$

成立, 因此 $x+2y$ 的最小值为 2. 故选 B.

7. A 【解析】由正实数 x, y 满足 $4x+3y=4$, 可得 $2(2x+1)+(3y+2)=8$.

令 $a=2x+1, b=3y+2$, 可得 $2a+b=8$,

$$\therefore \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3y+2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \times$$

$$\frac{2a+b}{8} = \frac{1}{8} \times \left(3 + \frac{2a}{b} + \frac{b}{a} \right) \geq \frac{1}{8} \times$$

$$\left(3 + 2\sqrt{\frac{2a}{b} \cdot \frac{b}{a}} \right), \text{ 即 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{ 当}$$

$$\text{且仅当 } \frac{2a}{b} = \frac{b}{a}, \text{ 即 } a = 8 - 4\sqrt{2}, b = 8\sqrt{2} - 8,$$

$$\text{即 } x = \frac{7}{2} - 2\sqrt{2}, y = \frac{8\sqrt{2}-10}{3} \text{ 时取等号, } \therefore$$

$$\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3y+2} \text{ 的最小值为 } \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4}. \text{ 故选 A.}$$

8. BC 【解析】对于 A, m, n 均为正实数, 则 $2m+n=mn \geq 2\sqrt{2mn}$, 解得 $\sqrt{mn} \geq 2\sqrt{2}$, 即 $mn \geq 8$, 当且仅当 $2m=n=4$ 时等号成立, 则 mn 的最小值为 8, 故 A 不正确;

对于 B, 若 $2m+n=1$, 则 $m^2+n^2 = m^2 +$

$$(1-2m)^2 = 5m^2 - 4m + 1 = 5\left(m - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5},$$

$$\text{当 } m = \frac{2}{5} \text{ 时, } m^2 + n^2 \text{ 取最小值为 } \frac{1}{5}, \text{ 故 B}$$

正确;

对于 C, 令 $t = \frac{m}{n} (t > 0)$, 则 $\frac{m}{m+2n} + \frac{n}{m+n} =$

$$\frac{t}{t+2} + \frac{1}{t+1} = \frac{t^2+2t+2}{t^2+3t+2} = 1 - \frac{t}{t^2+3t+2} =$$

$$1 - \frac{1}{t + \frac{2}{t} + 3},$$

$$\text{因为 } t + \frac{2}{t} \geq 2\sqrt{2}, \text{ 当且仅当 } t = \frac{2}{t} = \sqrt{2} \text{ 时}$$

等号成立,

$$\text{则 } \frac{m}{m+2n} + \frac{n}{m+n} = 1 - \frac{1}{t + \frac{2}{t} + 3} \geq 1 - \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = 2$$



$\sqrt{2}-2$, 当且仅当 $\frac{m}{n}=\sqrt{2}$ 时取等号,

所以 $\frac{m}{m+2n}+\frac{n}{m+n}$ 的最小值为 $2\sqrt{2}-2$, 故 C

正确;

对于 D, 若 $m+n=4$, 则 $(m+1)+(n+3)=8$,

所以 $\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n+3}=\left[\frac{(m+1)+(n+3)}{8}\right]\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n+3}\right)=\frac{1}{8}+$

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\left(\frac{n+3}{m+1}+\frac{m+1}{n+3}\right),$$

因为 $\frac{n+3}{m+1}+\frac{m+1}{n+3}\geq 2\times\sqrt{\frac{n+3}{m+1}\cdot\frac{m+1}{n+3}}=2$,

所以 $\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n+3}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\left(\frac{n+3}{m+1}+\frac{m+1}{n+3}\right)\geq\frac{1}{2}$,

当且仅当 $\frac{n+3}{m+1}=\frac{m+1}{n+3}$, 即 $m=3, n=1$ 时等号成立,

则 $\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n+3}$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$, 故 D 不正确.

故选 BC.

9. D 【解析】因为 $\frac{2x^2+2}{x}=2x+\frac{2}{x}$, $\frac{y^2+4}{y+2}=\frac{y^2-4}{y+2}+\frac{8}{y+2}=y-2+\frac{8}{y+2}$,

$$\frac{y^2-4}{y+2}+\frac{8}{y+2}=y-2+\frac{8}{y+2},$$

又 $2x+y=2$,

$$\text{则 } \frac{2x^2+2}{x}+\frac{y^2+4}{y+2}=2x+y-2+\frac{2}{x}+\frac{8}{y+2}=\frac{2}{x}+\frac{8}{y+2},$$

由 $2x+y=2$ 可得 $2x+(y+2)=4$,

不妨设 $2x=m, y+2=n$,

则 $\frac{2}{x}+\frac{8}{y+2}=\frac{4}{m}+\frac{8}{n}$, 问题转化为当 $m+n=$

4 时, 求 $\frac{4}{m}+\frac{8}{n}$ 的最小值,

$$\frac{4}{m}+\frac{8}{n}=4\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)=(m+n)\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)=3+\frac{n}{m}+\frac{2m}{n}\geq 3+2\sqrt{2},$$

当且仅当 $\frac{n}{m}=\frac{2m}{n}$, 即 $n=\sqrt{2}m$ 时取等号,

$$\text{即 } \begin{cases} y+2=2\sqrt{2}x, \\ 2x+y=2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=2\sqrt{2}-2, \\ y=6-4\sqrt{2}, \end{cases}$$

所以 $\frac{2x^2+2}{x}+\frac{y^2+4}{y+2}$ 的最小值是 $3+2\sqrt{2}$.

故选 D.



方法点拨 用基本不等式求最值时, 要注意其必须满足的三个条件: “一正、二定、三相等”.

(1) “一正”就是各项必须为正数;

(2) “二定”就是要求和的最小值, 必须把构成和的两项之积转化成定值; 要求积的最大值, 则必须把构成积的因式的和转化成定值;

(3) “三相等”是利用基本不等式求最值时, 必须验证等号成立的条件, 若不能取等号, 则这个最值就不是所求的最值, 这也是最容易出现错误的地方, 多次利用基本不等式时, 注意等号成立条件是否一致.

10. $\{m | -1 < m < 3\}$ 【解析】因为不等式 $\frac{2}{x} +$

$$\frac{8}{y} > |m-1| + 4 \text{ 恒成立, 所以 } \left(\frac{2}{x} + \frac{8}{y} \right)_{\min} > |m-1| + 4,$$

因为正实数 x, y 满足 $x+y=3$, 所以 $\frac{x}{3} +$

$$\frac{y}{3} = 1,$$

$$\text{所以 } \frac{2}{x} + \frac{8}{y} = \left(\frac{2}{x} + \frac{8}{y} \right) \times 1 = \left(\frac{2}{x} + \frac{8}{y} \right) \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{3} \right) = \frac{10}{3} + \frac{2y}{3x} + \frac{8x}{3y} \geq \frac{10}{3} +$$

$$\frac{8}{y} \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{3} \right) = \frac{10}{3} + \frac{2y}{3x} + \frac{8x}{3y} \geq \frac{10}{3} +$$

$$2\sqrt{\frac{2y}{3x} \cdot \frac{8x}{3y}} = 6,$$

当且仅当 $\frac{2y}{3x} = \frac{8x}{3y}$, 即 $x=1, y=2$ 时等号成

$$\text{立, 所以 } \left(\frac{2}{x} + \frac{8}{y} \right)_{\min} = 6.$$

所以 $6 > |m-1| + 4$, 即 $|m-1| < 2$, 解得 $-1 < m < 3$, 则实数 m 的取值范围是 $\{m | -1 < m < 3\}$.

11. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 【解析】由已知得 $x \neq 0, y =$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - x \right), \text{ 所以 } x^2 + y^2 = x^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} - x \right)^2 = \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{5}{4}x^2 \cdot \frac{1}{4x^2}} -$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ 当且仅当 } \frac{5}{4}x^2 = \frac{1}{4x^2}, \text{ 即 } x =$$

$$\pm \sqrt[4]{\frac{1}{5}} \text{ 时取等号.}$$



方法技巧 通过消元利用基本不等式求最值的策略

当所求最值的代数式中的变量比较多时,通常考虑利用已知条件消去部分变量后,凑出“和为常数”或“积为常数”的形式,最后利用基本不等式求最值.

12. $\frac{4}{3}$ 【解析】设 $\begin{cases} 4x+y=a, \\ x+y=b, \end{cases}$

则 $\begin{cases} x=\frac{a-b}{3}, \\ y=\frac{4b-a}{3}, \end{cases}$ 因此 $\frac{4x}{4x+y} + \frac{y}{x+y} = \frac{\frac{4(a-b)}{3}}{a} + \frac{\frac{4b-a}{3}}{b}$

$$= \frac{4b-a}{3b} = \frac{4}{3} - \frac{4b}{3a} + \frac{4}{3} - \frac{a}{3b} = \frac{8}{3} - \left(\frac{4b}{3a} + \frac{a}{3b} \right).$$

因为 $\frac{4b}{3a} + \frac{a}{3b} \geq 2\sqrt{\frac{4b}{3a} \cdot \frac{a}{3b}} = \frac{4}{3}$, 当且仅当 $\frac{4b}{3a} = \frac{a}{3b}$, 即 $a=2b$ 时, 等号成立, 所以

$$\frac{4x}{4x+y} + \frac{y}{x+y} \leq \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3},$$

当且仅当 $y=2x$ 时, 等号成立.

13. 6 【解析】因为 $x>0, y>0, x+y=1$, 所以

$$0 < x < 1, \frac{3x}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{3x}{1-x} + \frac{1}{x(1-x)} = \frac{3x^2+1}{-x^2+x}$$

$$= \frac{3x^2-3x+3x+1}{-x^2+x} = -3 + \frac{3x+1}{-x^2+x}.$$

令 $3x+1=t, 1 < t < 4$, 则 $\frac{3x}{y} + \frac{1}{xy} = -3 + \frac{t}{-\left(\frac{t-1}{3}\right)^2 + \frac{t-1}{3}}$

$$= -3 - \frac{t}{\frac{t^2}{9} - \frac{5}{9}t + \frac{4}{9}} = -3 - \frac{1}{\frac{t}{9} + \frac{4}{9t} - \frac{5}{9}},$$

其中 $\frac{t}{9} + \frac{4}{9t} \geq 2\sqrt{\frac{t}{9} \cdot \frac{4}{9t}} = \frac{4}{9}$, 当且仅当 $\frac{t}{9} = \frac{4}{9t}$, 即 $t=2$ 时, 等号成立, 故 $\frac{3x}{y} + \frac{1}{xy} = -3 - \frac{1}{\frac{t}{9} + \frac{4}{9t} - \frac{5}{9}} \geq -3 - \frac{1}{\frac{4}{9} - \frac{5}{9}} = 6$, 即 $\frac{3x}{y} + \frac{1}{xy}$ 的最小值为 6, 此时 $x=\frac{1}{3}, y=\frac{2}{3}$.

一题多解

原式 $= \frac{3x}{y} + \frac{(x+y)^2}{xy} = \frac{3x}{y} + \frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x} = \frac{4x}{y} + \frac{y}{x} + 2 \geq 4 + 2 = 6$, 当且仅当 $\frac{4x}{y} = \frac{y}{x}$, 即 $x=\frac{1}{3}, y=\frac{2}{3}$ 时取等号.

**2.1~2.2 节测上分**

- 1. A** 【解析】由四边形 $ABCD$ 为矩形, $\triangle BCE$ 为等腰直角三角形, 可得 $\triangle ABF$ 也为等腰直角三角形, 所以题图①中, 阴影部分面积 $S_1 = S_{\triangle ABF} + S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2}\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} + \frac{1}{2}\sqrt{b} \cdot \sqrt{b} = \frac{a+b}{2}$, 题图②中, 矩形 $ABCD$ 的面积 $S_2 = \sqrt{ab}$, 由两图阴影部分面积关系直观得出 $S_1 \geq S_2$, 即 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, 当且仅当 $a=b$ 时等号成立. 故选 A.

- 2. C** 【解析】对于 A, $a > b, ab > 0$, 不等式两边同时除以 ab 可得 $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$, 故 A 正确;
对于 B, $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}, c < 0$, 不等式两边同时乘 c , 可得 $a < b$, 故 B 正确;
对于 C, 因为 $a > b > c$, 所以 $a - c > b - c > 0$, 所以 $\frac{1}{b-c} > \frac{1}{a-c}$, 故 C 错误;
对于 D, $a > b, c^2 \geq 0$, 所以 $ac^2 \geq bc^2$, 故 D 正确. 故选 C.

- 3. D** 【解析】因为 $a + \frac{1}{b} = 2$, 所以 $(a-1) + \frac{1}{b} = 1$, 其中 $a-1 > 0, b > 0$, 所以 $\frac{4}{a-1} + b = \left[(a-1) + \frac{1}{b} \right] \cdot \left(\frac{4}{a-1} + b \right) = 4 + b(a-1) + \frac{4}{b(a-1)} + 1 \geq 5 + 2\sqrt{b(a-1) \cdot \frac{4}{b(a-1)}} = 9$, 当且仅当 $b(a-1) = \frac{4}{b(a-1)}$ 且 $a + \frac{1}{b} = 2$, 即 $a = \frac{5}{3}, b = 3$ 时, 等号成立, 所以 $\frac{4}{a-1} + b$ 的最小值为 9. 故选 D.

- 4. A** 【解析】设选辩题 A 的男生有 x 人, 选辩题 A 的女生有 y 人, 选辩题 B 的男生有 m 人, 选辩题 B 的女生有 n 人. 已知该班女生人数多于男生人数, 即 $y+n > x+m$. 又知选辩题 A 的人数多于选辩题 B 的人数, 即 $x+y > m+n$. 将这两个不等式相加得到 $2y+x+n > 2m+x+n$, 两边同时减去 $x+n$ 得到 $2y > 2m$, 即 $y > m$. 这就意味着选辩题 A 的女生人数多于选辩题 B 的男生人数. 故选 A.

- 5. C** 【解析】因为 $(x-1)(y-2) = 2, x > 0, y > 0$, 所以 $xy = 2x + y$, 即 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1$, 所以 $3x + 2y = (3x + 2y) \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} \right) = 7 + \frac{2y}{x} + \frac{6x}{y} \geq$



$$7 + 2\sqrt{\frac{2y}{x} \cdot \frac{6x}{y}} = 7 + 4\sqrt{3}, \text{ 当且仅当}$$

$$\begin{cases} \frac{2y}{x} = \frac{6x}{y}, \\ x > 0, y > 0, \\ (x-1)(y-2) = 2, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}, \\ y = 2 + \sqrt{3} \end{cases} \text{ 时, 等号}$$

成立.

综上所述, $3x+2y$ 的最小值为 $7+4\sqrt{3}$. 因为不等式 $3x+2y > m$ 恒成立, 所以实数 m 的取值范围是 $\{m | m < 7+4\sqrt{3}\}$. 故选 C.

6. D 【解析】设 $5a-4b = s(a-b) + t(a+b) =$

$$(s+t)a - (s-t)b, \text{ 则 } \begin{cases} s+t=5, \\ s-t=4, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} s=\frac{9}{2}, \\ t=\frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\text{则 } 5a-4b = \frac{9}{2}(a-b) + \frac{1}{2}(a+b)$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{9}{2}(a-b) + \frac{1}{2}(a+b) \right] \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left[5 + \frac{a+b}{2(a-b)} + \frac{9(a-b)}{2(a+b)} \right]$$

$$\geq \frac{1}{4} \left[5 + 2\sqrt{\frac{a+b}{2(a-b)} \cdot \frac{9(a-b)}{2(a+b)}} \right] = 2,$$

当且仅当 $\frac{a+b}{2(a-b)} = \frac{9(a-b)}{2(a+b)}$, 即 $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$ 时, 等号成立, 所以 $5a-4b$ 的最小值为

2. 故选 D.

7. BCD 【解析】对于 A, $2a+b = 1 \geq 2\sqrt{2ab}$,

$$\text{解得 } \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}, \text{ 平方得 } ab \leq \frac{1}{8},$$

当且仅当 $2a = b$, 即 $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$ 时取等号, 所以 ab 的最大值为 $\frac{1}{8}$, 故 A 错误;

对于 B, 由题知 $b = 2-3a > 0$, 得 $0 < a < \frac{2}{3}$, 则 $2a+b > 0$,

$$\text{所以 } \frac{2}{2a+b} + 5a + 2b = \frac{2}{2a+b} + 2a + b + 3a + b =$$

$$\frac{2}{2a+b} + 2a + b + 2 \geq 2\sqrt{\frac{2}{2a+b} \cdot (2a+b)} + 2 = 2\sqrt{2} + 2,$$

$$\text{当且仅当 } \frac{2}{2a+b} = 2a+b, \text{ 即 } a = 2-\sqrt{2}, b =$$

$3\sqrt{2}-4$ 时等号成立, 故 B 正确;


$$\text{对于 C, } \frac{a^4+4b^4+1}{ab} \geq \frac{4a^2b^2+1}{ab} = 4ab + \frac{1}{ab} \geq 2$$

$$\sqrt{4ab \times \frac{1}{ab}} = 4,$$

$$\text{当且仅当 } a^4 = 4b^4 \text{ 且 } 4ab = \frac{1}{ab}, \text{ 即 } a^2 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$



$b^2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 时取等号,

 **提示:** 连续用到两次基本不等式, 需要两个取等条件同时成立, 否则最值取不到

所以 $\frac{a^4 + 4b^4 + 1}{ab}$ 的最小值为 4, 故 C 正确;

对于 D, 设 $2a + 3b = x(a + 3b) + y(2a + b)$, 则 $2a + 3b = (x + 2y)a + (3x + y)b$,

$$\text{由 } \begin{cases} x + 2y = 2, \\ 3x + y = 3, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = \frac{4}{5}, \\ y = \frac{3}{5}, \end{cases} \text{ 则}$$

$$2a + 3b = \left[\frac{4}{5}(a + 3b) + \frac{3}{5}(2a + b) \right] \cdot$$

$$\left(\frac{3}{a + 3b} + \frac{1}{2a + b} \right) = 3 + \frac{9(2a + b)}{5(a + 3b)} + \frac{4(a + 3b)}{5(2a + b)} \geq$$

$$3 + 2\sqrt{\frac{9(2a + b)}{5(a + 3b)} \times \frac{4(a + 3b)}{5(2a + b)}} = \frac{27}{5},$$

当且仅当 $\frac{9(2a + b)}{5(a + 3b)} = \frac{4(a + 3b)}{5(2a + b)}$, 即 $a = \frac{9}{10}$,

$b = \frac{6}{5}$ 时取等号,

所以 $2a + 3b$ 的最小值为 $\frac{27}{5}$, 故 D 正确. 故选 BCD.

8. $\sqrt[3]{2}$



思路导引

由 $a^2c + b^2c = 1$, 得

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{c}, \text{ 设 } \max\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right) = M,$$

则 $M \geq \frac{1}{a}, M \geq \frac{1}{b}, M \geq \frac{1}{c}$, 再结合基本不等式求解.

【解析】 由 $a^2c + b^2c = 1, c > 0$ 可得 $a^2 + b^2 = \frac{1}{c}$,

设 $\max\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right) = M$, 则 $M \geq \frac{1}{a}, M \geq$

$$\frac{1}{b}, M \geq \frac{1}{c} = a^2 + b^2 \geq 2ab,$$

$$\text{由 } 3M = 2\sqrt{M} \cdot \sqrt{M} + M \geq \frac{2}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} + 2ab =$$

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{ab}} + 2ab \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot 2ab} =$$

$3\sqrt[3]{2}$, 当且仅当 $a = b = c = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 时, 等号成立.

$$\text{故 } \min\left(\max\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)\right) = \sqrt[3]{2}.$$



方法技巧 当 a, b, c 均大于 0 时,

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq$$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}, \text{ 当且仅当 } a=b=c \text{ 时取等}$$

号; 当 $a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 2)$ 均大于 0 时,

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}, \text{ 当且}$$

仅当 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 时取等号.

9.4 【解析】 因为 $a > b > 0$, 所以 $\frac{ab^2}{a-b} + ab +$

$$\frac{1}{b^2} = \frac{ab^2 - b^3 + b^3}{a-b} + ab + \frac{1}{b^2} = b^2 + \frac{b^3}{a-b} + ab +$$

$$\frac{1}{b^2} = 2b^2 + \frac{b^3}{a-b} + ab - b^2 + \frac{1}{b^2} = 2b^2 + \frac{1}{b^2} + \frac{b^3}{a-b}$$

$$+ b(a-b) \geq 2b^2 + \frac{1}{b^2} + 2\sqrt{\frac{b^3}{a-b} \cdot b(a-b)} =$$

$$2b^2 + \frac{1}{b^2} + 2b^2 = 4b^2 + \frac{1}{b^2} \geq 2\sqrt{4b^2 \cdot \frac{1}{b^2}} = 4,$$

当且仅当 $\frac{b^3}{a-b} = b(a-b)$, 且 $4b^2 = \frac{1}{b^2}$, 即 $a =$

$\sqrt{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 两个等号都成立, 此时 $\frac{ab^2}{a-b} +$

$ab + \frac{1}{b^2}$ 的最小值为 4.

10. 【解】 (1) 因为 $x > 0, y > 0$, 且满足 $\frac{4}{x} + \frac{1}{y} =$

$$2, \text{ 所以 } x+y = \frac{1}{2}(x+y) \cdot \left(\frac{4}{x} + \frac{1}{y} \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left(5 + \frac{4y}{x} + \frac{x}{y} \right) \geq$$

$$\frac{1}{2} \left(5 + 2\sqrt{\frac{4y}{x} \cdot \frac{x}{y}} \right) = \frac{9}{2}, \text{ 当且仅当 } x =$$

$$2y \text{ 且 } \frac{4}{x} + \frac{1}{y} = 2, \text{ 即 } y = \frac{3}{2}, x = 3 \text{ 时取等}$$

号, 故 $x+y$ 的最小值为 $\frac{9}{2}$.

$$(2) \text{ 因为 } \frac{4}{x} + \frac{1}{y} = 2, \text{ 所以 } 4y+x = 2xy \geq$$

$$2\sqrt{4y \cdot x} = 4\sqrt{xy}, \text{ 当且仅当 } x=4y, \text{ 即 } y =$$

1, $x=4$ 时取等号, 所以 $xy \geq 4$,

$$\text{则 } \frac{1}{(x+4)(y+1)} = \frac{1}{xy+x+4y+4} = \frac{1}{3xy+4} \leq$$

$$\frac{1}{16}, \text{ 故 } \frac{1}{(x+4)(y+1)} \text{ 的最大值为 } \frac{1}{16}.$$



2.3 二次函数与一元二次方程、不等式



基础上分

1. D 【解析】 $A = \{x | x - 3 > 0\} = \{x | x > 3\}$, $B = \{x | x^2 - 5x + 4 > 0\} = \{x | (x - 4)(x - 1) > 0\} = \{x | x > 4 \text{ 或 } x < 1\}$, 所以 $A \cap B = \{x | x > 3\} \cap \{x | x > 4 \text{ 或 } x < 1\} = \{x | x > 4\}$. 故选 D.

2. D 【解析】对于 A, 由 $3x^2 - 7x - 10 \leq 0$ 得 $(3x - 10)(x + 1) \leq 0$,

解得 $-1 \leq x \leq \frac{10}{3}$, 所以不等式 $3x^2 - 7x - 10 \leq 0$

的解集为 $\left\{x \mid -1 \leq x \leq \frac{10}{3}\right\}$, 故 A 不符合题意;

对于 B, 由 $-x^2 + 6x - 9 \leq 0$ 得 $x^2 - 6x + 9 \geq 0$, 即 $(x - 3)^2 \geq 0$, 所以不等式 $-x^2 + 6x - 9 \leq 0$ 的解集为 \mathbf{R} , 故 B 不符合题意;

对于 C, 由 $-2x^2 - x < -3$ 得 $2x^2 + x - 3 > 0$, 即 $(2x + 3)(x - 1) > 0$, 解得 $x < -\frac{3}{2}$ 或 $x > 1$, 所以

不等式 $-2x^2 - x < -3$ 的解集为 $\left\{x \mid x < -\frac{3}{2} \text{ 或 } x > 1\right\}$, 故 C 不符合题意;

对于 D, 由 $x^2 - 4x + 7 \leq 0$ 得 $(x - 2)^2 \leq -3$, 所以不等式 $x^2 - 4x + 7 \leq 0$ 的解集为 \emptyset , 故 D 符合题意. 故选 D.

规律点拨 解不含参数的一元二次不等式的一般步骤

(1) 将不等式变形, 使一端为 0 且另一端二次项系数大于 0, 即 $ax^2 + bx + c > 0 (a > 0)$, $ax^2 + bx + c < 0 (a > 0)$ (不等号也可以为“ \geq ”“ \leq ”);

(2) 将对应方程因式分解或计算对应方程的判别式;

(3) 求出相应的一元二次方程的根或根据判别式说明方程没有实根;

(4) 根据对应二次函数图象与 x 轴的相对位置写出不等式的解集.

3. A 【解析】由 $y = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x} > 0$, 得 $\frac{(x - 1)(x + 1)}{x} > 0$,

所以 $\begin{cases} (x - 1)(x + 1) > 0, \\ x > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} (x - 1)(x + 1) < 0, \\ x < 0, \end{cases}$

解得 $x \in \{x | -1 < x < 0 \text{ 或 } x > 1\}$, 则“ $x > 1$ ”是“ $y > 0$ ”的充分不必要条件.



4. B 【解析】由集合 $\{x \in \mathbf{Z} | (ax-1)(x-1) < 0\}$ 中恰有 2 个元素, 得 $a > 0$,

提示: 若 $a \leq 0$, 则集合中有无数个元素

因此方程 $(ax-1)(x-1) = 0$ 必有 2 个实根, 分别为 1 和 $\frac{1}{a}$, 且 $\frac{1}{a} > 1$.

提示: 若 $\frac{1}{a} < 1$, 则集合为空集

故 $\{x \in \mathbf{Z} | (ax-1)(x-1) < 0\} = \left\{x \in \mathbf{Z} \mid 1 < x < \frac{1}{a}\right\}$, $3 < \frac{1}{a} \leq 4$, 解得 $\frac{1}{4} \leq a < \frac{1}{3}$,

所以实数 a 的取值范围为 $\left\{a \mid \frac{1}{4} \leq a < \frac{1}{3}\right\}$. 故选 B.

方法总结

解含参二次不等式需要分类讨论, 讨论顺序为二次项系数符号 (图象的开口方向)、对应一元二次方程根的判别式符号、根的大小.

5. 【解】若 $a = 0$, 则原不等式可化为 $-4x + 4 \geq 0$, 解得 $x \leq 1$.

若 $a < 0$, 则原不等式可化为 $(x-1) \cdot \left(x - \frac{4}{a}\right) \leq 0$, 解得 $\frac{4}{a} \leq x \leq 1$.

若 $a > 0$, 则原不等式可化为 $(x-1) \cdot \left(x - \frac{4}{a}\right) \geq 0$ (*), 当 $a = 4$ 时, $\frac{4}{a} = 1$, 则不等式 (*) 的解集为 \mathbf{R} ;

当 $a > 4$ 时, $\frac{4}{a} < 1$, 则不等式 (*) 的解集为

$$\left\{x \mid x \leq \frac{4}{a} \text{ 或 } x \geq 1\right\};$$

当 $0 < a < 4$ 时, $\frac{4}{a} > 1$, 则不等式 (*) 的解集

$$\text{为 } \left\{x \mid x \leq 1 \text{ 或 } x \geq \frac{4}{a}\right\}.$$

综上, 当 $a < 0$ 时, 所求解集为 $\left\{x \mid \frac{4}{a} \leq x \leq 1\right\}$; 当 $a = 0$ 时, 所求解集为 $\{x \mid x \leq 1\}$;

当 $0 < a < 4$ 时, 所求解集为 $\left\{x \mid x \leq 1 \text{ 或 } x \geq \frac{4}{a}\right\}$; 当 $a = 4$ 时, 所求解集为 \mathbf{R} ; 当 $a > 4$

时, 所求解集为 $\left\{x \mid x \leq \frac{4}{a} \text{ 或 } x \geq 1\right\}$.

**易错警示** 解含参不等式时分类讨论**不全致错**

(1) 在高中阶段, 判别式是与“二次”联系在一起的, 在处理二次项系数含参数的问题时, 要注意进行讨论, 二次项系数不为 0 是“二次”的前提.

(2) 分类需要做到使所给参数 a 的集合的并集为全集, 交集为空集. 本题分类的标准首先是二次项系数 a 是否为 0, 其次是 a 的正负, 最后是 $\frac{4}{a}$ 与 1 的大小关系.

(3) 当讨论 $a < 0$ 时, 要注意变形时不等式中不等号方向的变化及解集的选取.

6. ACD 【解析】对于 A, 不等式 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 的解集为 $\{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 4\}$, 故 $x = -1$ 和 $x = 4$ 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根,

→ **提示**: 给出一元二次不等式的解集相当于给出对应方程的根的情况

$$\text{所以} \begin{cases} a > 0, \\ -\frac{b}{a} = -1 + 4, \\ \frac{c}{a} = -1 \times 4, \end{cases} \text{解得 } b = -3a, c = -4a,$$

故 A 正确;

对于 B, $cx^2 - bx + a < 0$ 可变为 $-4ax^2 + 3ax + a < 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 3x - 1 > 0$, 解得 $x > 1$ 或 $x < -\frac{1}{4}$, 故 B

错误;

对于 C, $\frac{3}{b} + c = \frac{3}{-3a} + (-4a) = \frac{1}{-a} - 4a =$

$$-\left(\frac{1}{a} + 4a\right) \leq -2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot 4a} = -4, \text{ 当且仅}$$

当 $\frac{1}{a} = 4a$, 即 $a = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 所以

$\frac{3}{b} + c$ 的最大值为 -4, 故 C 正确;

对于 D, 因为 $x = -1$ 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根, 所以 $a - b + c = 0$, 故 D 正确. 故选 ACD.

$$7. \left\{ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \mid -\frac{2}{3} < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 0 \right\}$$



思路导引 根据题意可知 x_1, x_2

是方程 $a(x+1)(x-3)+1=0$ 的两个根, 注意不要忽略“+1”这一部分, 同时根据解集的形式能够判断 a 的符号, 再利用根与系数的关系解题即可.

【解析】因为关于 x 的不等式 $a(x+1)(x-$



$3)+1>0(a \neq 0)$ 的解集是 $\{x | x_1 < x < x_2, x_1 < x_2\}$, 所以 $a < 0$, 且 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 - 2ax + 1 - 3a = 0$ 的两个根, 则 $\Delta = 4a^2 - 4a(1 - 3a) > 0$, 解得 $a < 0$ 或 $a > \frac{1}{4}$, 所以 $a < 0$.

由根与系数的关系可得 $x_1 + x_2 = 2, x_1 x_2 = \frac{1-3a}{a} = \frac{1}{a} - 3 < -3$.

所以 $-\frac{1}{3} < \frac{1}{x_1 x_2} < 0$, 所以 $-\frac{2}{3} < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} =$

$\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{2}{x_1 x_2} < 0$, 即 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 的取值范围

是 $\left\{ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \mid -\frac{2}{3} < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 0 \right\}$.

8. B 【解析】由 $\frac{x+1}{2x-1} \geq 2$ 得 $\frac{-3x+3}{2x-1} \geq 0$, 解得

$\frac{1}{2} < x \leq 1$, 则 $p: \frac{1}{2} < x \leq 1$.

 **提示:** 注意分母不能为 0

由 $|1-x| \leq x$ 得 $x \geq \frac{1}{2}$, 则 $q: x \geq \frac{1}{2}$.

故 p 是 q 的充分不必要条件. 故选 B.

9. D 【解析】由 $\frac{y^2-3}{2y-4} - y \geq 0$,

得 $\frac{y^2-3-2y^2+4y}{2y-4} \geq 0$, 所以 $\frac{y^2-4y+3}{2y-4} \leq 0$,

所以 $\begin{cases} (y^2-4y+3)(2y-4) \leq 0, \\ 2y-4 \neq 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} (y-1)(y-3)(2y-4) \leq 0, \\ 2y-4 \neq 0, \end{cases}$ 解得 $y \leq 1$ 或

$2 < y \leq 3$, 故 y 的取值构成的集合为 $\{y | y \leq 1 \text{ 或 } 2 < y \leq 3\}$. 故选 D.

易错警示 分式不等式转化为整式不等式时, 未考虑分母不能为 0 而致错.

10. B 【解析】由 $\frac{x^2+5x-6}{x-1} \geq 0$,

得 $\begin{cases} (x^2+5x-6)(x-1) \geq 0, \\ x-1 \neq 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} (x-1)(x+6)(x-1) \geq 0, \\ x-1 \neq 0, \end{cases}$

解得 $x \geq -6$ 且 $x \neq 1$, 所以原不等式的解集为 $\{x | -6 \leq x < 1 \text{ 或 } x > 1\}$.

故选 B.

易错警示 随意消项致错

本题容易错解成如下情况:

$$\frac{x^2+5x-6}{x-1} = \frac{(x-1)(x+6)}{x-1} = x+6 \geq 0.$$

错误的原因是随意消项, 事实上, 当 $x-1=0$ 时, 左侧分式无意义.



11. $\left\{x \mid x \geq \frac{3}{8}\right\}$ 【解析】当 $x < 0$ 时, 原不等

式等价于 $-2x - (1 - 2x) \geq \frac{1}{2}$, 即 $-1 \geq \frac{1}{2}$, 不等式无解;

当 $0 \leq x < \frac{1}{2}$ 时, 原不等式等价于 $2x - (1 - 2x) \geq \frac{1}{2}$, 解得 $x \geq \frac{3}{8}$, 不等式的解集为

$$\left\{x \mid \frac{3}{8} \leq x < \frac{1}{2}\right\};$$

当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时, 原不等式等价于 $2x - (2x - 1) \geq \frac{1}{2}$, 即 $1 \geq \frac{1}{2}$, 不等式的解集为 $\left\{x \mid x \geq \frac{1}{2}\right\}$;

综上所述, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid x \geq \frac{3}{8}\right\}$.

一题多解

原不等式等价于 $|2x| -$

$$|2x - 1| \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x| - \left|x - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{4}.$$

其几何意义为: 数轴上的点 x 到原点的距离与 x 到 $\frac{1}{2}$ 的距离之差大于或等于 $\frac{1}{4}$. 则 $x \geq \frac{3}{8}$, 故解集为 $\left\{x \mid x \geq \frac{3}{8}\right\}$.

12. A 【解析】根据题意, 当 $x \in \mathbf{R}$, 且 $x > 0$ 时, 不等式 $ax^2 - (a+3)x + 3 \geq 0$ 恒成立.

若 $a = 0$, 则不等式可化为 $x \leq 1$, 所以 $a = 0$ 不符合题意.

若 $a \neq 0$, 则不等式可化为 $(x-1)(ax-3) \geq 0$,

因为当 $x \in \mathbf{R}$, 且 $x > 0$ 时, $(x-1)(ax-3) \geq 0$ 恒成立, 所以必有 $a > 0$, 故只有当二次函数 $y = ax^2 - (a+3)x + 3$ 的图象与 x 轴仅有一个交点时才符合题意, 即方程 $ax - 3 = 0$ 的解为 1, 所以 $a = 3$.

故选 A.

13. D



思路导引 先利用基本不等式

“1”的妙用求出 $x + \frac{y}{4}$ 的最小值, 再根据不等式有解转化为关于 m 的一元二次不等式后求出 m 的取值范围.

【解析】由 $x > 0, y > 0$ 且 $\frac{4}{y} + \frac{1}{x} = 1$, 得 $x +$



$$\frac{y}{4} = \left(x + \frac{y}{4}\right) \left(\frac{4}{y} + \frac{1}{x}\right) = 2 + \frac{4x}{y} + \frac{y}{4x} \geq$$

$2 + 2\sqrt{\frac{4x}{y} \cdot \frac{y}{4x}} = 4$, 当且仅当 $\frac{4x}{y} = \frac{y}{4x}$, 即 $y = 4x = 8$ 时取等号.

由不等式 $x + \frac{y}{4} < m^2 - 3m$ 有解, 得 $m^2 - 3m > 4$, 解得 $m < -1$ 或 $m > 4$, 所以 m 的取值范围是 $\{m \mid m < -1 \text{ 或 } m > 4\}$. 故选 D.

14. A



思路导引

由题意得 $\neg p$ 为真命题, 令 $y = x^2 + (4-a)x + 13 - 2a$ ($x \geq -1$), 通过讨论函数图象的对称轴位置, 即可求得 $y = x^2 + (4-a)x + 13 - 2a$ ($x \geq -1$) 的最小值, 建立不等式即可求得实数 a 的取值范围.

【解析】 由题意得命题 p 的否定 $\neg p$: $\exists x \geq -1, x^2 + (4-a)x + 13 - 2a < 0$, 且 $\neg p$ 为真命题.

 **提示:** 有解问题

令 $y = x^2 + (4-a)x + 13 - 2a$ ($x \geq -1$), 则其图象的对称轴为直线 $x = \frac{a-4}{2}$.

当 $\frac{a-4}{2} \leq -1$, 即 $a \leq 2$ 时, 函数 $y = x^2 + (4-a)x + 13 - 2a$ ($x \geq -1$) 的最小值为 $(-1)^2 - (4-a) + 13 - 2a = 10 - a$,

由题意得 $10 - a < 0$, 即 $a > 10$, 不符合题意.

当 $\frac{a-4}{2} > -1$, 即 $a > 2$ 时, 二次函数的最小值为

$$\left(\frac{a-4}{2}\right)^2 + (4-a) \cdot \frac{a-4}{2} + 13 - 2a = \frac{36-a^2}{4},$$

由题意得 $\frac{36-a^2}{4} < 0$, 即 $a < -6$ 或 $a > 6$, 所以

a 的取值范围为 $\{a \mid a > 6\}$.

故选 A.

15. **【解】** (1) 当 $m = 1$ 时, $y = 2x^2 - 7x + 6$,

则由题得 $2x^2 - 7x + 6 > 0$, 解得 $x < \frac{3}{2}$ 或 $x > 2$,

即不等式的解集为 $\left\{x \mid x < \frac{3}{2} \text{ 或 } x > 2\right\}$.

(2) 由 $y \leq -3x + 10m - 1$, 得 $2x^2 - (4m + 3)x + 6m \leq -3x + 10m - 1$, 即 $2x^2 - 4mx - 4m + 1 \leq 0$, 即 $2x^2 + 1 \leq 4m(x+1)$ ①,

因为 $x \in \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$, 所以 $x+1 \in \{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$,

则①等价于 $4m \geq \frac{2x^2+1}{x+1}$, $x \in \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$.



$$\text{令 } y_1 = \frac{2x^2+1}{x+1} = \frac{2(x+1)^2-4(x+1)+3}{x+1} =$$

$$2(x+1) + \frac{3}{x+1} - 4, \text{ 且 } 1 \leq x+1 \leq 2,$$

$$\text{所以 } y_1 \geq 2\sqrt{2(x+1) \cdot \frac{3}{x+1}} - 4 = 2\sqrt{6} - 4,$$

$$\text{当且仅当 } 2(x+1) = \frac{3}{x+1}, \text{ 即 } x = \frac{\sqrt{6}}{2} - 1 \text{ 时,}$$

$$\text{等号成立, 且当 } x+1=1 \text{ 时, } y_1=1, \text{ 当 } x+1=2 \text{ 时, } y_1=\frac{3}{2},$$

$$\text{所以 } 2\sqrt{6}-4 \leq y_1 \leq \frac{3}{2},$$

$$\text{而 } 4m \geq \frac{2x^2+1}{x+1} \text{ 对任意的 } x \in \{x | 0 \leq x \leq 1\}$$

恒成立,

$$\text{故 } 4m \geq \frac{3}{2}, \text{ 即 } m \geq \frac{3}{8},$$

所以实数 m 的取值范围

$$\text{是 } \left\{ m \mid m \geq \frac{3}{8} \right\}.$$

16. B 【解析】在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AB = AC$, 则 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

由 $AD = x$ 米, 得 $EF = FC = AD = x$ 米, $FA = (200-x)$ 米, 依题意有 $x(200-x) \geq 7500$, 解得 $50 \leq x \leq 150$,

即 AD 的长度 x (单位: 米) 的范围是 $\{x | 50 \leq x \leq 150\}$. 故选 B.

17. 【解】 (1) 降低税率后的税率为 $(10-x)\%$, 农产品的收购量为 $a(1+2x\%)$ 万担, 收购总金额为 $200a(1+2x\%)$ 万元.

$$\text{依题意得 } y = 200a(1+2x\%)(10-x)\% = \frac{1}{50}a(100+2x)(10-x) \quad (0 < x < 10).$$

(2) 原税收为 $200a \times 10\% = 20a$ (万元).

$$\text{依题意得 } \frac{1}{50}a(100+2x)(10-x) \geq 20a \times$$

$$83.2\%, \text{ 化简得 } x^2 + 40x - 84 \leq 0, \text{ 解得 } -42 \leq x \leq 2.$$

又因为 $0 < x < 10$, 所以 $0 < x \leq 2$, 即 x 的取值范围为 $\{x | 0 < x \leq 2\}$.

方法总结 解决一元二次不等式实际问题的步骤

(1) 设未知数, 列一元二次不等式;

(2) 化成标准形式: $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$ (不等号也可以为“ \geq ”或“ \leq ”), 其中 $a>0$;

(3) 解方程 $ax^2+bx+c=0$;

(4) 画出函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象;



(5) 借助图象求一元二次不等式的解集, 并合理取舍;

(6) 下结论, 写明答案, 注意有无单位.



对点上分

1. D 【解析】因为 $0 < m < 1$, 所以 $\frac{1}{m} > m$, 所以

$(x - m) \left(x - \frac{1}{m}\right) < 0$ 的解集为 $\left\{x \mid m < x < \frac{1}{m}\right\}$. 故选 D.

2. ACD 【解析】对于一元二次不等式 $a(x - a)(x + 1) > 0$,

当 $a > 0$ 时, 函数 $y = a(x - a)(x + 1)$ 的图象开口向上, 与 x 轴的交点为 $(a, 0), (-1, 0)$, 故不等式的解集为 $\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > a\}$.

当 $a < 0$ 时, 函数 $y = a(x - a)(x + 1)$ 的图象开口向下, 若 $a = -1$, 不等式的解集为 \emptyset ; 若 $-1 < a < 0$, 不等式的解集为 $\{x \mid -1 < x < a\}$; 若 $a < -1$, 不等式的解集为 $\{x \mid a < x < -1\}$.

故选 ACD.

3. C 【解析】根据题意, 分两种情况讨论.

①当 $a^2 - 4 = 0$, 即 $a = \pm 2$ 时,

若 $a = 2$, 原不等式为 $4x - 1 \geq 0$, 解得 $x \geq \frac{1}{4}$, 不等式的解集为 $\left\{x \mid x \geq \frac{1}{4}\right\}$, 不是空集, 符合题意;

若 $a = -2$, 原不等式为 $-1 \geq 0$, 无解, 不符合题意.

②当 $a^2 - 4 \neq 0$, 即 $a \neq \pm 2$ 时,

若不等式的解集是空集,

则有 $\begin{cases} a^2 - 4 < 0, \\ \Delta = (a + 2)^2 + 4(a^2 - 4) < 0, \end{cases}$

解得 $-2 < a < \frac{6}{5}$, 则当不等式的解集不为空

集时, 有 $a < -2$ 或 $a \geq \frac{6}{5}$ 且 $a \neq 2$.

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $\left\{a \mid a < -2 \text{ 或 } a \geq \frac{6}{5}\right\}$. 故选 C.

易错警示 忽略二次项系数的讨论而致错

求解含参型一元二次不等式的解集时, 若二次项系数含参, 则需要考虑该系数是否为 0, 我们学习的判别式是与“二次”联系在一起的, 否则容易造成漏解或错解.



快解 当 $a = -2$ 时, 不等式为 $-1 \geq 0$, 解集为空集, 不符合题意, 故排除 B 和 D 选项;

当 $a = 0$ 时, 不等式为 $-4x^2 + 2x - 1 \geq 0$, 解集为空集, 不符合题意, 故排除 A 选项. 故选 C.

4. B

思路导引 先按照 $a = 0, a < 0, a > 0$ 分情况讨论, 当 $a > 0$ 时, 原不等式可化为 $a \left(x - \frac{1}{a} \right) (x - 3) < 0$, 再分别按照 $\frac{1}{a} = 3, 0 < \frac{1}{a} < 3, \frac{1}{a} > 3$ 讨论求解.

【解析】 ①当 $a = 0$ 时, 原不等式为 $-x + 3 < 0$, 解得 $x > 3$, 不等式有无数个整数解, 不符合题意.

②当 $a < 0$ 时, $y = ax^2 - (3a + 1)x + 3$ 的图象开口向下,

因此不等式 $ax^2 - (3a + 1)x + 3 < 0$ 有无数个整数解, 不符合题意.

③当 $a > 0$ 时, 原不等式可化为 $a \left(x - \frac{1}{a} \right) (x - 3) < 0$.

(i) 当 $\frac{1}{a} = 3$, 即 $a = \frac{1}{3}$ 时, 原不等式可化为 $(x - 3)^2 < 0$,

此时不等式的解集为 \emptyset , 不符合题意;

(ii) 当 $0 < \frac{1}{a} < 3$, 即 $a > \frac{1}{3}$ 时, 原不等式的解

集为 $\left\{ x \mid \frac{1}{a} < x < 3 \right\}$,

此时不等式最多有 2 个整数解 (即 1 和 2), 不符合题意;

(iii) 当 $\frac{1}{a} > 3$, 即 $0 < a < \frac{1}{3}$ 时, 原不等式的

解集为 $\left\{ x \mid 3 < x < \frac{1}{a} \right\}$,

则满足题意的 3 个整数解为 4, 5, 6,

所以 $6 < \frac{1}{a} \leq 7$, 所以 $\frac{1}{7} \leq a < \frac{1}{6}$.

综上所述, a 的取值范围是 $\left\{ a \mid \frac{1}{7} \leq a < \frac{1}{6} \right\}$.

故选 B.

5. **【解】** (1) $\frac{2x-3}{x+1} > 0$ 等价于 $(2x-3)(x+1) >$

0, 解得 $x < -1$ 或 $x > \frac{3}{2}$, 故集合 $A =$

$\left\{ x \mid x < -1 \text{ 或 } x > \frac{3}{2} \right\}$,

当 $m = 2$ 时, 由题得 $x^2 - 6x + 5 < 0$, 解得 $1 < x < 5$, 故集合 $B = \{ x \mid 1 < x < 5 \}$. 因此 $A \cap B$



$$= \left\{ x \mid \frac{3}{2} < x < 5 \right\}.$$

(2) 由 $(\complement_U A) \cap B = B$ 可知 $B \subseteq \complement_U A$, 因为 $A = \left\{ x \mid x < -1 \text{ 或 } x > \frac{3}{2} \right\}$, 所以 $\complement_U A = \left\{ x \mid -1 \leq x \leq \frac{3}{2} \right\}$.

由 $x^2 - 3mx + 2m^2 - m - 1 < 0$, 得 $[x - (2m + 1)][x - (m - 1)] < 0$, 对应方程的判别式 $\Delta = (m + 2)^2 \geq 0$.

当 $m = -2$ 时, 不等式为 $(x + 3)^2 < 0$, 此时 $B = \emptyset$, 满足 $B \subseteq \complement_U A$;

当 $m > -2$ 时, $2m + 1 > m - 1$, 集合 $B = \{x \mid m - 1 < x < 2m + 1\}$,

若 $B \subseteq \complement_U A$, 则 $\begin{cases} m - 1 \geq -1, \\ 2m + 1 \leq \frac{3}{2}, \end{cases}$ 解得 $0 \leq m \leq \frac{1}{4}$;

当 $m < -2$ 时, $2m + 1 < m - 1$, 集合 $B = \{x \mid 2m + 1 < x < m - 1\}$,

若 $B \subseteq \complement_U A$, 则 $\begin{cases} 2m + 1 \geq -1, \\ m - 1 \leq \frac{3}{2}, \end{cases}$ 解得 $-1 \leq m \leq \frac{5}{2}$, 不符合题意.

综上所述, 实数 m 的取值范围为

$$\left\{ m \mid m = -2 \text{ 或 } 0 \leq m \leq \frac{1}{4} \right\}.$$

6. AC 【解析】依题意可得方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根分别为 $x_1 = -2$ 和 $x_2 = 1$, 且 $a > 0$.

由根与系数的关系可得

$$\begin{cases} -2 + 1 = -\frac{b}{a} = -1, \\ -2 \times 1 = \frac{c}{a} = -2, \end{cases} \quad \text{即 } b = a, c = -2a.$$

对于 A, 由 $a > 0$ 可得 $b = a > 0, c = -2a < 0$, 故 **A 正确**;

对于 B, 易知 $4a + 2b + c = 4a > 0$, 故 **B 错误**;

对于 C, 不等式 $bx + c > 0$ 即为 $ax - 2a > 0$, 由 $a > 0$ 得 $x > 2$, 所以不等式 $bx + c > 0$ 的解集为 $\{x \mid x > 2\}$, 故 **C 正确**;

对于 D, 不等式 $cx^2 - bx + a < 0$ 即为 $-2ax^2 - ax + a < 0$, 即 $2x^2 + x - 1 > 0$, 所以 $(2x - 1)(x + 1) > 0$, 解得 $x > \frac{1}{2}$ 或 $x < -1$, 即不等式的解

集为 $\left\{ x \mid x < -1 \text{ 或 } x > \frac{1}{2} \right\}$, 故 **D 错误**. 故选 **AC**.

7. ACD 【解析】因为关于 x 的不等式 $ax^2 +$

$4x + 2b \leq 0$ ($a \neq 0$) 的解集为 $\left\{ -\frac{2}{a} \right\}$, 所以

$a > 0$, 且 $\Delta = 16 - 8ab = 0$, 即 $ab = 2$, 故 **A 正**



确, B 错误;

因为 $a > 0$, 且 $ab = 2$, 所以 $b > 0$, $a + 2b \geq 2\sqrt{2ab} = 4$, 当且仅当 $a = 2b$, 即 $a = 2, b = 1$ 时, $a + 2b$ 取得最小值 4, 故 C 正确;

若 $a > b$, 则 $a - b > 0$, 则 $\frac{a^2 + b^2}{a - b} = \frac{(a - b)^2 + 2ab}{a - b} =$

$(a - b) + \frac{4}{a - b} \geq 2\sqrt{4} = 4$, 当且仅当 $a - b = 2$,

即 $a = 1 + \sqrt{3}, b = -1 + \sqrt{3}$ 时, 等号成立, 故 D 正确. 故选 ACD.

8. D 【解析】因为甲写错了常数 b , 得到的解集为 $\{x | 1 < x < 6\}$, 但 c 值未错, 故两根之积不变, 所以 $c = 6$.

 **提示:** 一元二次不等式的解集与对应方程的根的关系

因为乙写错了常数 c , 得到的解集为 $\{x | -1 < x < 6\}$, 可得 $-b = -1 + 6$, 即 $b = -5$.

所以原不等式为 $x^2 - 5x + 6 < 0$, 解得 $2 < x < 3$.

故选 D.

9. B



思路导引 按照 $a = 0, a > 0$ 和 $a < 0$ 分类讨论, 根据一元二次方程根的分布列不等式组求解即可.

【解析】显然 $a \neq 0$.

当 $a > 0$ 时,

$$\text{有} \begin{cases} -2 < \frac{a+1}{2a} < 3, \\ \Delta = (a+1)^2 - 4a(3-2a) > 0, \\ a \cdot (-2)^2 - (a+1) \cdot (-2) - 2a+3 > 0, \\ a \cdot 3^2 - 3(a+1) - 2a+3 > 0, \end{cases}$$

解得 $a > 1$;

当 $a < 0$ 时,

$$\text{有} \begin{cases} -2 < \frac{a+1}{2a} < 3, \\ \Delta = (a+1)^2 - 4a(3-2a) > 0, \\ a \cdot (-2)^2 - (a+1) \cdot (-2) - 2a+3 < 0, \\ a \cdot 3^2 - 3(a+1) - 2a+3 < 0, \end{cases}$$

解得 $a < -\frac{5}{4}$.

故实数 a 的取值范围为 $\left\{ a \mid a > 1 \text{ 或 } a < -\frac{5}{4} \right\}$.

故选 B.

10. B



思路导引 求出不等式恒成立时 a 的取值范围, 然后结合集合的包含关系与充分必要条件的判断即可求解.

【解析】当 $a = 0$ 时, 原不等式为 $4 > 0$, 成



立,故 $a=0$ 符合题意;

当 $a \neq 0$ 时,关于 x 的不等式 $ax^2 - 4ax + 4 > 0$

在 \mathbf{R} 上恒成立 $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ \Delta = 16a^2 - 16a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < 1,$

综上所述, a 的取值范围为 $\{a | 0 \leq a < 1\}$,

而 $\{a | 0 < a < 1\} \subsetneq \{a | 0 \leq a < 1\}$, 所以“ $ax^2 - 4ax + 4 > 0$ 在 \mathbf{R} 上恒成立”是“ $0 < a < 1$ ”的必要不充分条件. **故选 B.**

11. B 【解析】当 $m < 0$ 时,函数 $y = mx^2 - 2x + 3$ 的图象开口向下,对称轴为直线 $x =$

$\frac{1}{m}$, 所以当 $x > 1$ 时, y 随 x 的增大而减小,

由二次函数图象特征知,必存在 $x_0 > 1$ 使得 $y \leq 0$, 故 $m < 0$ 满足条件;

当 $m = 0$ 时,不等式化简为 $-2x + 3 \leq 0$, 解

得 $x \geq \frac{3}{2} > 1$, 故 $m = 0$ 满足条件;

当 $m > 0$ 时,函数 $y = mx^2 - 2x + 3$ 的图象开

口向上,对称轴为直线 $x = \frac{1}{m}$, 根据题意

可得,

方程 $mx^2 - 2x + 3 = 0$ 的判别式 $\Delta = 4 -$

$12m \geq 0$, 即 $0 < m \leq \frac{1}{3}$, 则 $\frac{1}{m} \geq 3$;

此时二次函数在对称轴处取得最小值且

$\frac{1}{m} \geq 3$,

故存在 $x_0 = 3 > 1$ 使得 $y \leq 0$, 故 $0 < m \leq \frac{1}{3}$

满足条件.

综上, m 的取值范围为 $\left\{m \mid m \leq \frac{1}{3}\right\}$.

故选 B.

12. $\left\{m \mid m < -\frac{4}{3} \text{ 或 } m > 1\right\}$ 【解析】由已知可

得 $x + 2(y + 1) = 6$, 所以 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y+1} =$

$\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y+1}\right) \cdot \frac{1}{6} [x + 2(y+1)] = \frac{1}{6} \left[4 +$

$\frac{4(y+1)}{x} + \frac{x}{y+1}\right] \geq \frac{1}{6} \left(4 +$

$2\sqrt{\frac{4(y+1)}{x} \cdot \frac{x}{y+1}}\right) = \frac{4}{3}$, 当且仅当

$\begin{cases} \frac{4(y+1)}{x} = \frac{x}{y+1}, \\ x + 2(y+1) = 6, \\ x > 0, y > 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x = 3, \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ 时取等号.

因为不等式 $m^2 + \frac{1}{3}m > \frac{2}{x} + \frac{1}{y+1}$ 有解, 所



以 $m^2 + \frac{1}{3}m > \frac{4}{3}$, 即 $3m^2 + m - 4 > 0$, 即

$(3m+4)(m-1) > 0$, 解得 $m < -\frac{4}{3}$ 或 $m > 1$,

所以 m 的取值范围为 $\left\{ m \mid m < -\frac{4}{3} \right.$
或 $m > 1 \left. \right\}$.

13. 【解】(1) 由题意知 $-3, 2$ 是方程 $ax^2 + bx - 6 = 0$ 的根, 且 $a > 0$,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{b}{a} = -3+2, \\ -\frac{6}{a} = (-3) \times 2, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a = 1, \\ b = 1. \end{cases}$$

(2) \because 不等式 $[m(ax^2 + bx - 6)] + 6m < m^2 + 1$ 对所有实数 m 都成立,

\therefore 对任意的 m 有 $m^2 - (x^2 + x)m + 1 > 0$ 恒成立.

则关于 m 的一元二次方程 $m^2 - (x^2 + x)m + 1 = 0$ 中, $\Delta < 0$, 即 $(x^2 + x)^2 - 4 < 0$, 解得 $-2 < x < 1$,

故 x 的取值范围为 $\{x \mid -2 < x < 1\}$.



综合上分

14. $\{k \mid -5 \leq k < 3 \text{ 或 } 4 < k \leq 5\}$ 【解析】由 $x^2 - 2x - 8 > 0$, 可得 $x < -2$ 或 $x > 4$.

由 $2x^2 + (2k + 7)x + 7k < 0$, 可得 $(2x + 7)(x + k) < 0$,

当 $k = \frac{7}{2}$ 时, 不等式 $(2x + 7)(x + k) < 0$ 即

为 $2\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 < 0$, 该不等式无解;

当 $k > \frac{7}{2}$ 时, 不等式 $(2x + 7)(x + k) < 0$ 的解

集为 $\left\{ x \mid -k < x < -\frac{7}{2} \right\}$,

此时原不等式组的解集为

$\left\{ x \mid -k < x < -\frac{7}{2} \right\}$, 则 $\begin{cases} -k < -4 < -\frac{7}{2}, \\ -5 \leq -k, \end{cases}$ 解得

$4 < k \leq 5$;

当 $k < \frac{7}{2}$ 时, 不等式 $(2x + 7)(x + k) < 0$ 的解

集为 $\left\{ x \mid -\frac{7}{2} < x < -k \right\}$,

若原不等式组有整数解, 则必然包含 -3 , 故唯一整数解只能是 -3 ,

即 $\begin{cases} -\frac{7}{2} < -3 < -k, \\ 5 \geq -k, \end{cases}$ 解得 $-5 \leq k < 3$.



综上所述,实数 k 的取值范围是 $\{k \mid -5 \leq k < 3 \text{ 或 } 4 < k \leq 5\}$.

15.



思路导引

(1) 根据题意得

$[x] \leq x < [x] + 1$, 然后解不等式即可;

(2) 将 $\forall x \in \left\{x \mid 1 \leq x \leq \frac{7}{2}\right\}$,

$[x]^2 - m[x] + 4 > 0$ 恒成立转化为

$\forall x \in \left\{x \mid 1 \leq x \leq \frac{7}{2}\right\}, m < [x] +$

$\frac{4}{[x]}$ 恒成立, 然后利用基本不等式求

最值即可;

(3) 分 $a=0, a>0, a<0$ 三种情况讨论即可.

【解】(1) 由题意得 $[x] \leq x < [x] + 1$, 且 $[x] \in \mathbf{Z}$.

因为 $-\frac{5}{2} \leq [x] \leq \frac{5}{2}$, 即 $-2 \leq [x] \leq 2$, 所

以 $-2 \leq x < 3$, 故 $-\frac{5}{2} \leq [x] \leq \frac{5}{2}$ 的解集为

$\{x \mid -2 \leq x < 3\}$.

又 $2[x]^2 - 11[x] + 15 \leq 0$,

即 $([x] - 3)(2[x] - 5) \leq 0$,

所以 $\frac{5}{2} \leq [x] \leq 3$, 则 $[x] = 3$,

所以 $3 \leq x < 4$,

所以 $2[x]^2 - 11[x] + 15 \leq 0$ 的解集为 $\{x \mid 3 \leq x < 4\}$.

(2) $\forall x \in \left\{x \mid 1 \leq x \leq \frac{7}{2}\right\}, [x]^2 - m[x] +$

$4 > 0$ 恒成立, 即 $1 \leq [x] \leq 3, m < [x] +$

$\frac{4}{[x]}$ 恒成立.

又 $[x] + \frac{4}{[x]} \geq 4$, 当且仅当 $[x] = 2$,

即 $2 \leq x < 3$ 时, 等号成立, 故 $[x] + \frac{4}{[x]}$ 的

最小值为 4, 所以 $m < 4$,

故 m 的取值范围为 $\{m \mid m < 4\}$.

(3) 不等式 $[x]^2 - 2[x] - a^2 + 1 \leq 0$, 即 $([x] + a - 1)([x] - a - 1) \leq 0$.

①若 $a=0$, 不等式为 $[x]^2 - 2[x] + 1 \leq 0$, 即 $[x] = 1$, 此时 $1 \leq x < 2$, 显然不符合题意.

②若 $a>0$, 则 $1-a < 1+a$, 由 $([x] + a - 1) \cdot ([x] - a - 1) \leq 0$, 解得 $1-a \leq [x] \leq 1+a$.

因为不等式的解集为 $\{x \mid 1-a \leq [x] \leq 1+a\} = \{x \mid 0 \leq x < 3\} = \{x \mid -1 < [x] < 3\}$, 所以

$\begin{cases} -1 < 1-a \leq 0, \\ 2 \leq 1+a < 3, \end{cases}$ 解得 $1 \leq a < 2$.

③若 $a<0$, 则 $1+a < 1-a$, 由 $([x] + a - 1) \cdot ([x] - a - 1) \leq 0$, 解得 $1+a \leq [x] \leq 1-a$.

因为不等式的解集为 $\{x \mid 1+a \leq [x] \leq 1-a\}$



$a\} = \{x | 0 \leq x < 3\} = \{x | -1 < [x] < 3\}$, 所以

$$\begin{cases} -1 < 1+a \leq 0, \\ 2 \leq 1-a < 3, \end{cases} \text{解得 } -2 < a \leq -1.$$

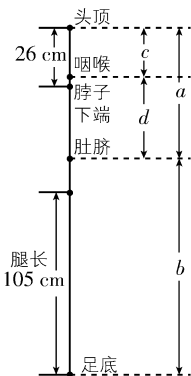
综上所述, a 的取值范围是 $\{a | -2 < a \leq -1 \text{ 或 } 1 \leq a < 2\}$.

方法总结

对于恒成立问题, 常用到以下两个结论: (1) $a > y$ 恒成立 $\Leftrightarrow a > y_{\max}$; (2) $a < y$ 恒成立 $\Leftrightarrow a < y_{\min}$.

真题上分

- 1. B** 【解析】如图, 设“某人”头顶至肚脐的长度为 a cm, 肚脐至足底的长度为 b cm, 头顶至咽喉的长度为 c cm, 咽喉至肚脐的长度为 d cm.



$$\text{则 } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618,$$

$$c < 26, b > 105, c + d = a.$$

设“某人”的身高为 h cm, 即 $a + b = h$.

$$\text{由 } \begin{cases} b > 105, \\ a \approx 0.618b, \end{cases} \text{解得 } a > 64.89,$$

$$\text{由 } \begin{cases} c < 26, \\ c \approx 0.618d, \end{cases} \text{解得 } d < 42.07,$$

所以 $c + d < 26 + 42.07 = 68.07$, 即 $a < 68.07$.

$$\begin{cases} a < 68.07, \\ a \approx 0.618b, \end{cases} \text{解得 } b < 110.15.$$

整理可得 $64.89 + 105 < a + b < 68.07 + 110.15$, 即 $169.89 < h < 178.22$, 结合选项可知其身高可能是 175 cm, 故选 B.

一题多解

若以 26 为头顶到咽喉的长度, 则身高为 $\left(26 + 26 \times \frac{2}{\sqrt{5}-1}\right) \times \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}-1}\right) = 26 \times \left(1 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 \approx 178(\text{cm})$.

若以 105 为肚脐到足底的长度, 则身高为 $105 \times \left(1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = 105 \times \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 170(\text{cm})$.

结合选项可知其身高可能是 175 cm, 故选 B.



关键点拨 本题解答的关键：(1) 设出相关几何量，利用黄金分割的条件建立方程组；(2) 利用不等式的性质得到相关几何量的取值范围。

2. C 【解析】对于 A，由 $(a-b)^2 \geq 0$ ，可得 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ，故 A 错误；

对于 B， $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{ab} = \frac{a+b-1}{ab}$ ，由 $a > 0, b > 0$

不能判断 $a+b$ 与 1 的大小，故 B 错误；

对于 C，因为 $a > 0, b > 0$ ，所以由基本不等式可得 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ，当且仅当 $a=b$ 时等号成立，又 $2\sqrt{ab} > \sqrt{ab}$ ，所以 $a+b > \sqrt{ab}$ ，故 C 正确；

对于 D，由已知可得 $\frac{1}{a} > 0, \frac{1}{b} > 0$ ，所以由基本不等式可得 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}$ ，当且仅当 $a=b$ 时等号成立，故 D 错误。故选 C。

3. BC



思路导引 对于 A, B, 由条件，

得 $(x+y)^2 - 3xy = 1$ ，将 $xy = \frac{(x+y)^2}{4} -$

$\frac{(x-y)^2}{4}$ 代入 $\longrightarrow 1 = \frac{(x+y)^2}{4} +$

$\frac{3(x-y)^2}{4} \longrightarrow$ 利用放缩法可求得 $x+y$

的范围；

对于 C，由条件，得 $x^2 + y^2 - 1 = xy \longrightarrow$ 利用基本不等式求解即可；

对于 D，取特殊值验证即可。

【解析】对于 A, B，由 $x^2 + y^2 - xy = 1$ ，得 $(x+y)^2 - 3xy = 1$ ，而 $xy = \frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4}$ ，

所以 $(x+y)^2 - 3 \left[\frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4} \right] = 1$ ，

即 $1 = \frac{(x+y)^2}{4} + \frac{3(x-y)^2}{4} \geq \frac{(x+y)^2}{4}$ ，所以 $-$

$2 \leq x+y \leq 2$ ，所以 A 不正确，B 正确；

对于 C, D，由 $x^2 + y^2 - xy = 1$ ，得 $x^2 + y^2 - 1 = xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$ ，当且仅当 $x=y$ 时等号成立，所以 $x^2 + y^2 \leq 2$ ，所以 C 正确；

当 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}, y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时， $x^2 + y^2 < 1$ ，所以 D 不正确。故选 BC。

4. $2\sqrt{2}$ 【解析】由题意可知， $\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} + b \geq$

$2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{a}{b^2}} + b = \frac{2}{b} + b \geq 2\sqrt{\frac{2}{b} \cdot b} = 2\sqrt{2}$ ，

当且仅当 $\frac{1}{a} = \frac{a}{b^2}$ 时，第一个不等号中的等

号成立，当且仅当 $\frac{2}{b} = b$ 时，第二个不等号



中的等号成立,即 $a=b=\sqrt{2}$ 时,等号同时成立,所以 $\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+b$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

5.4 【解析】由已知得, $\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{8}{a+b}=\frac{ab}{2a}+$

$$\frac{ab}{2b}+\frac{8}{a+b}=\frac{a+b}{2}+\frac{8}{a+b}\geq 2\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{8}{a+b}}=4,$$

当且仅当 $\frac{a+b}{2}=\frac{8}{a+b}$ 且 $ab=1$, 即

$$\begin{cases} a=2+\sqrt{3}, \\ b=2-\sqrt{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=2-\sqrt{3}, \\ b=2+\sqrt{3} \end{cases} \text{ 时取等号, 故 } \frac{1}{2a}+$$

$\frac{1}{2b}+\frac{8}{a+b}$ 的最小值为 4.

一题多解

方法一: 由已知得, $\frac{1}{2a}+$

$$\frac{1}{2b}+\frac{8}{a+b}=\frac{a+b}{2ab}+\frac{8}{a+b}=\frac{a+b}{2}+\frac{8}{a+b}, \text{ 下同}$$

解析.

方法二: 因为 $a>0, b>0$, 且 $ab=1$, 所

以 $b=\frac{1}{a}$, 于是 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{8}{a+b}=\frac{1}{2a}+\frac{a}{2}+$

$$\frac{8}{a+\frac{1}{a}} = \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right) + \frac{8}{a+\frac{1}{a}} \geq$$

$$2\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{8}{a+\frac{1}{a}}}=4, \text{ 当且仅}$$

$$\text{当 } \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right) = \frac{8}{a+\frac{1}{a}}, \text{ 即}$$

$$\begin{cases} a=2+\sqrt{3}, \\ b=2-\sqrt{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=2-\sqrt{3}, \\ b=2+\sqrt{3} \end{cases} \text{ 时取等号,}$$

故 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{8}{a+b}$ 的最小值为 4.

6. 【证明】(1) 由题设可知, a, b, c 均不为零,

$$\text{所以 } ab+bc+ca=\frac{1}{2}[(a+b+c)^2-(a^2+$$

$$b^2+c^2)]=-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)<0.$$

(2) 不妨设 $\max\{a, b, c\}=a$,

因为 $abc=1, a=-(b+c)$, 所以 $a>0, b<0, c<0$.

$$\text{由 } bc\leq\frac{(b+c)^2}{4}, \text{ 可得 } abc\leq\frac{a^3}{4}, \text{ 故 } a\geq\sqrt[3]{4},$$

$$\text{所以 } \max\{a, b, c\}\geq\sqrt[3]{4}.$$

关键点拨

本题第(2)问由于涉及 $\max\{a, b, c\}$, 因此可先设出其最大值为 a , 利用 $abc=1, a=-(b+c)$ 判断

出 $a>0, b<0, c<0$, 结合 $bc\leq\frac{(b+c)^2}{4}$,

然后变形求出 a 的范围.



7. C 【解析】因为 $\frac{x-4}{x-1} \geq 2$, 所以 $\frac{x-4}{x-1} - 2 \geq 0$,

故有 $\frac{-x-2}{x-1} \geq 0$, 即 $\frac{x+2}{x-1} \leq 0$, 等价于

$$\begin{cases} (x+2)(x-1) \leq 0, \\ x-1 \neq 0, \end{cases}$$
 解得 $-2 \leq x < 1$, 故原不

等式的解集是 $\{x | -2 \leq x < 1\}$. 故选 C.

快解

$x-1$ 作为分母, 故 $x \neq 1$, 排除 A.

当 $x=0$ 时, 左边 $= 4 \geq 2$ 成立, 故 $x=0$ 是不等式的一个解, 排除 B, D. 故选 C.

8. C 【解析】由 $x^2 - x - 6 \geq 0$, 得 $x \leq -2$ 或 $x \geq 3$, 则 $N = \{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 3\}$.

$\therefore M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$,

$\therefore M \cap N = \{-2\}$.

故选 C.

9. $\{x | -1 < x < 3\}$ 【解析】 $x^2 - 2x - 3 < 0$, 即 $(x-3)(x+1) < 0$, 解得 $-1 < x < 3$,

所以原不等式的解集为 $\{x | -1 < x < 3\}$.



第二章 全章上分

1. D 【解析】因为集合 $A = \{x | x = 2k - 1, k \in \mathbf{Z}\} = \{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$, $B = \{x | x^2 - 5x - 6 \leq 0\} = \{x | -1 \leq x \leq 6\}$, 所以 $A \cap B = \{-1, 1, 3, 5\}$. 故选 D.

2. D 【解析】对于 A, 当 $c = 0$ 时, $ac^2 = bc^2 = 0$, 故 A 不是真命题;

对于 B, 取 $a = 2, b = -1$, 则 $a > b$, 但是 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 故 B 不是真命题;

对于 C, 取 $a = -2, b = -1$, 此时 $a < b < 0$, 但是 $a^2 > ab > b^2$, 故 C 不是真命题;

对于 D, 若 $a < b < c < 0$, 则 $\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+c} = \frac{c(a-b)}{b(b+c)} > 0$ 恒成立, 即 $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$, 故 D 是真命题. 故选 D.

3. D



思路导引

根据 $\frac{2}{a}$ 是方程 $x^2 + bx - 8 = 0$ 的一个根得到 a 和 b 的关系, 从而表示出 b , 代入 $b + \frac{6}{a}$ 中, 根据基本不等式求出 $b + \frac{6}{a}$ 的最小值.

【解析】由 $\frac{2}{a}$ 是方程 $x^2 + bx - 8 = 0$ 的一个根, 可得 $\frac{4}{a^2} + \frac{2b}{a} - 8 = 0$, 即 $b = 4a - \frac{2}{a}$, 又 $a > 0$, 所以 $b + \frac{6}{a} = 4a - \frac{2}{a} + \frac{6}{a} = 4a + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{4a \cdot \frac{4}{a}} = 8$, 当且仅当 $4a = \frac{4}{a}$, 即 $\begin{cases} a=1, \\ b=2 \end{cases}$ 时, 等号成立, 即 $b + \frac{6}{a}$ 的最小值是 8. 故选 D.

4. A 【解析】由于天平的两臂不相等, 故可设天平左臂长为 $a (a > 0)$, 右臂长为 $b (b > 0)$, 所以 $\frac{a}{b} = \lambda (\lambda > 0 \text{ 且 } \lambda \neq 1)$, 所以 $a = \lambda b$.

设先称得的黄金的实际质量为 m_1 克, 后称得的黄金的实际质量为 m_2 克.

由杠杆的平衡原理得 $bm_1 = a \times 5$, $am_2 = b \times 5$, 解得 $m_1 = \frac{5a}{b}$, $m_2 = \frac{5b}{a}$, 则 $m_1 + m_2 = \frac{5b}{a} + \frac{5a}{b}$.

因为 $m_1 + m_2 - 10 = \frac{5b}{a} + \frac{5a}{b} - 10 = \frac{5(b-a)^2}{ab} =$



$$\frac{5(b-\lambda b)^2}{\lambda b^2} = \frac{5(1-\lambda)^2}{\lambda}, \text{ 而 } \lambda > 0 \text{ 且 } \lambda \neq 1, \text{ 所以}$$

以 $\frac{5(1-\lambda)^2}{\lambda} > 0$, 即 $m_1 + m_2 > 10$, 所以可知称

出的黄金质量大于 10 克. **故选 A.**

5. B 【解析】因为 $x+2y=3$, 所以 $\frac{x^2+3y}{xy} = \frac{x}{y}$

$$+ \frac{3}{x} = \frac{x}{y} + \frac{x+2y}{x} = \frac{x}{y} + \frac{2y}{x} + 1. \text{ 因为 } x > 0,$$

$$y > 0, \text{ 所以 } \frac{x^2+3y}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{2y}{x} + 1 \geq$$

$$2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{2y}{x}} + 1 = 2\sqrt{2} + 1, \text{ 当且仅当 } y =$$

$$\frac{3(2-\sqrt{2})}{2}, x = 3(\sqrt{2}-1) \text{ 时, 等号成立, 所以}$$

$$\frac{x^2+3y}{xy} \text{ 的最小值为 } 2\sqrt{2}+1. \text{ **故选 B.}**$$

6. D 【解析】由不等式 $2x^2+mx-3m^2 < 0$ 可得 $(x-m)(2x+3m) < 0$.

①当 $m=0$ 时, 不等式为 $2x^2 < 0$, 此时不等式的解集为 \emptyset , 不符合题意.

②当 $m > 0$ 时, 不等式的解集为

$$\left\{ x \mid -\frac{3}{2}m < x < m \right\}, \text{ 若不等式的解集中恰}$$

好有 3 个整数,

则当这 3 个整数为 $-2, -1, 0$ 时,

$$\begin{cases} -3 \leq -\frac{3}{2}m < -2, \\ 0 < m \leq 1, \end{cases} \text{ 此时 } m \text{ 无解;}$$

当这 3 个整数为 $-1, 0, 1$ 时,

$$\begin{cases} 1 < m \leq 2, \\ -2 \leq -\frac{3}{2}m < -1, \end{cases} \text{ 解得 } 1 < m \leq \frac{4}{3}.$$

因为 $\left| -\frac{3}{2}m \right| > |m|$, 所以这 3 个整数不

会都大于或等于 0, 所以此时 m 的取值范

$$\text{围为 } \left\{ m \mid 1 < m \leq \frac{4}{3} \right\}.$$

③当 $m < 0$ 时, 不等式的解集为 $\left\{ x \mid m <$

$$x < -\frac{3}{2}m \right\}, \text{ 若不等式的解集中恰好有}$$

3 个整数,

则当这 3 个整数为 $-1, 0, 1$ 时, 有

$$\begin{cases} 1 < -\frac{3}{2}m \leq 2, \\ -2 \leq m < -1, \end{cases} \text{ 解得 } -\frac{4}{3} \leq m < -1;$$

当这 3 个整数为 $0, 1, 2$ 时, 有

$$\begin{cases} -1 \leq m < 0, \\ 2 < -\frac{3}{2}m \leq 3, \end{cases} \text{ 此时 } m \text{ 无解.}$$

因为 $\left| -\frac{3}{2}m \right| > |m|$, 所以这 3 个整数不可

能都小于或等于 0, 所以此时 m 的取值范



围为 $\left\{ m \mid -\frac{4}{3} \leq m < -1 \right\}$.

综上所述, 实数 m 的取值范围为 $\left\{ m \mid -\frac{4}{3} \leq m < -1 \text{ 或 } 1 < m \leq \frac{4}{3} \right\}$. 故选 D.

- 7. AD** 【解析】因为 $1 \leq a \leq 4, -3 \leq b \leq -2$, 所以 $2 \leq -b \leq 3, \frac{1}{4} \leq \frac{1}{a} \leq 1$, 所以 $-2 \leq a+b \leq 2, 3 \leq a-b \leq 7$, 故 A 正确, B 错误; 所以 $2 \leq -ab \leq 12, -3 \leq \frac{b}{a} \leq -\frac{1}{2}$, 即 $-12 \leq ab \leq -2$, 故 C 错误, D 正确. 故选 AD.

- 8. AC** 【解析】原不等式等价于 $\begin{cases} (x-2)(ax+b)(x-c) \geq 0, \\ x-c \neq 0, \end{cases}$ 因为解集为 $\{x \mid x \leq -2 \text{ 或 } 1 < x \leq 2\}$, 所以 $a < 0$ 且 $c = 1, -2a+b=0$, 故 A 正确; 因为 $a < 0, b = 2a < 0$, 所以点 (a, b) 在第三象限, 故 B 错误; $2a + \frac{1}{b} = 2a + \frac{1}{2a} = -\left(-2a + \frac{1}{-2a}\right)$, 因为 $-2a + \frac{1}{-2a} \geq 2\sqrt{(-2a) \cdot \frac{1}{-2a}} = 2$, 所以 $-\left(-2a + \frac{1}{-2a}\right) \leq -2$, 当且仅当 $-2a = \frac{1}{-2a}$, 即 $a = -\frac{1}{2}$ 时取等号, 故 C 正确; 由 $ax^2 + ax - b \geq 0$ 得 $ax^2 + ax - 2a \geq 0$, 即 $x^2 + x - 2 \leq 0$, 解集为 $\{x \mid -2 \leq x \leq 1\}$, 故 D 错误. 故选 AC.

9. ABC



思路导引

根据不等式的解集以及方程根与系数的关系得到 $2m+n=1$ 可判断 A, 根据基本不等式可判断 B, 根据和为 1 的形式可判断 C 和 D.

【解析】对于 A, 由不等式 $(2m+t)x^2 - (n-t)x - 1 < 0$ 的解集为 $\left\{ x \mid -1 < x < \frac{1}{3} \right\}$, 可得 $2m+t > 0$, 且方程 $(2m+t)x^2 - (n-t)x - 1 = 0$ 的两根为 -1 和 $\frac{1}{3}$, 所以

$$\begin{cases} -1 + \frac{1}{3} = \frac{n-t}{2m+t}, \\ -1 \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{2m+t}, \end{cases} \text{ 所以 } 2m+t=3, n-t=-2,$$

所以 $2m+n=1$, 故 A 正确;

对于 B, 因为 $m > 0, n > 0$, 所以 $2m+n=1 \geq 2\sqrt{2mn}$, 可得 $mn \leq \frac{1}{8}$, 当且仅当 $2m=n=\frac{1}{2}$

时, 等号成立, 所以 mn 的最大值为 $\frac{1}{8}$, 故



B 正确;

对于 C, $\frac{1}{m} + \frac{m}{n} = \frac{2m+n}{m} + \frac{m}{n} = 2 + \frac{n}{m} +$

$\frac{m}{n} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{n}{m} \cdot \frac{m}{n}} = 4$, 当且仅当 $\frac{n}{m} =$

$\frac{m}{n}$, 即 $m = n = \frac{1}{3}$ 时, 等号成立, 所以 $\frac{1}{m} +$

$\frac{m}{n}$ 的最小值为 4, 故 C 正确;

对于 D, 由 $2m+n=1$ 得 $2(m+1)+(n+2)=$

5, 则 $\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+2} \right) \cdot [2(m+1) + (n+2)] = \frac{1}{5} \left[3 + \frac{n+2}{m+1} + \frac{2(m+1)}{n+2} \right] \geq \frac{1}{5}$

$\left[3 + 2\sqrt{\frac{n+2}{m+1} \cdot \frac{2(m+1)}{n+2}} \right] = \frac{3+2\sqrt{2}}{5}$, 当且

仅当 $\frac{n+2}{m+1} = \frac{2(m+1)}{n+2}$, 即 $m = 4 - \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $n =$

$5\sqrt{2} - 7$ 时, 等号成立, 所以 $\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+2}$ 的最

小值为 $\frac{3+2\sqrt{2}}{5}$, 故 D 错误. 故选 ABC.

10. $\left\{ 3x+2y \mid -\frac{3}{2} < 3x+2y < \frac{23}{2} \right\}$ 【解析】设

$3x + 2y = m(x + y) + n(x - y)$, 则

$$\begin{cases} m+n=3, \\ m-n=2, \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} m=\frac{5}{2}, \\ n=\frac{1}{2}, \end{cases} \text{ 即 } 3x + 2y =$$

$$\frac{5}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y).$$

又因为 $-1 < x+y < 4$, $2 < x-y < 3$, 所以 $-\frac{5}{2} <$

$\frac{5}{2}(x+y) < 10$, $1 < \frac{1}{2}(x-y) < \frac{3}{2}$, 所以

$-\frac{3}{2} < \frac{5}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y) < \frac{23}{2}$, 即 $-\frac{3}{2} <$

$3x+2y < \frac{23}{2}$.

11. $-2\sqrt{2}$ 【解析】原不等式化为 $x^2 - 2x + 3 \leq a(x-1)$,

$$\because x < 1, \therefore x-1 < 0, \therefore a \leq \frac{x^2 - 2x + 3}{x-1},$$

\therefore 存在 $x \in \{x \mid x < 1\}$, 使得 $a \leq \frac{x^2 - 2x + 3}{x-1}$ 成

立, $\therefore a \leq \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x-1} \right)_{\max}$.

令 $t = x - 1$, 则 $t < 0$, 则 $\frac{x^2 - 2x + 3}{x-1} =$

$$\frac{(t+1)^2 - 2(t+1) + 3}{t} = t + \frac{2}{t} =$$

$$- \left[(-t) + \frac{2}{-t} \right] \leq -2\sqrt{2},$$

当且仅当 $t = -\sqrt{2}$, 即 $x = 1 - \sqrt{2}$ 时, 等号成

立, $\therefore a \leq -2\sqrt{2}$, 则实数 a 的最大值为-



$$2\sqrt{2}.$$

$$12. \{m \mid m < 2\} \quad \left\{ b \mid b < -3 \text{ 或 } 5 < b < \frac{16}{3} \right\}$$

【解析】因为 $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$,

不等式 $\frac{3x^2 + 2x + 2}{x^2 + x + 1} > m$ 对一切实数 x 均成

立,所以不等式 $(3-m)x^2 + (2-m)x + 2-m > 0$ 对一切实数 x 均成立.

当 $3-m=0$, 即 $m=3$ 时, 不等式即 $-x-1 > 0$, 解得 $x < -1$, 显然不满足题意;

当 $3-m \neq 0$ 时,

$$\text{则} \begin{cases} 3-m > 0, \\ \Delta = (2-m)^2 - 4(3-m)(2-m) < 0, \end{cases}$$

解得 $m < 2$, 即实数 m 的取值范围为 $\{m \mid m < 2\}$.

因为关于 m 的方程 $m^2 + (3-b)m + 6-b = 0$ 在 $\{m \mid m < 2\}$ 内有两个不相等的实数解,

$$\text{所以} \begin{cases} \frac{b-3}{2} < 2, \\ \Delta = (3-b)^2 - 4(6-b) > 0, \\ 4+2(3-b)+6-b > 0, \end{cases}$$

解得 $b < -3$ 或 $5 < b < \frac{16}{3}$, 即实数 b 的取值

范围为 $\left\{ b \mid b < -3 \text{ 或 } 5 < b < \frac{16}{3} \right\}$.

13. 【解】(1) 由题意得 $10(1\,000-x)(1+0.2x\%) \geq 10 \times 1\,000$, 即 $x^2 - 500x \leq 0$, 又 $x > 0$, 所以 $0 < x \leq 500$.

即最多调整出 500 名员工从事第三产业.

(2) 从事第三产业的员工创造的年总利

润为 $10\left(a - \frac{3x}{500}\right)x$ 万元, 从事原来产业的

员工的年总利润为 $10(1\,000-x) \cdot (1+0.$

$2x\%)$ 万元, 则 $10\left(a - \frac{3x}{500}\right)x \leq 10(1\,000-x)$

$\left(1 + \frac{1}{500}x\right)$, 所以 $ax - \frac{3x^2}{500} \leq 1\,000 + 2x -$

$x - \frac{1}{500}x^2$, 所以 $ax \leq \frac{2x^2}{500} + 1\,000 + x$, 即 $a \leq$

$\frac{2x}{500} + \frac{1\,000}{x} + 1$ 恒成立.

因为 $\frac{2x}{500} + \frac{1\,000}{x} \geq 2\sqrt{\frac{2x}{500} \cdot \frac{1\,000}{x}} = 4$, 当

且仅当 $\frac{2x}{500} = \frac{1\,000}{x}$, 即 $x = 500$ 时, 等号成

立, 所以 $a \leq 5$.

又 $a > 0$, 所以 $0 < a \leq 5$, 即 a 的取值范围为 $\{a \mid 0 < a \leq 5\}$.

14. 【解】(1) 由 $\frac{5}{x-3} \geq -1$, 得 $\frac{x+2}{x-3} \geq 0$, 解得

$x \leq -2$ 或 $x > 3$, 所以 $A = \{x \mid x \leq -2 \text{ 或 } x >$



3}. 因为 $a = \frac{1}{2}, b = 8$, 所以 $B = \{x | x^2 - 2x - 8 < 0\} = \{x | -2 < x < 4\}$, 所以 $A \cup B = \mathbf{R}$.

(2) 由 $t > 2$, 得 $t - 2 > 0$, 所以 $\frac{t^2 + 5}{t - 2} = \frac{(t - 2)^2 + 4(t - 2) + 9}{t - 2} = (t - 2) + \frac{9}{t - 2} + 4 \geq$

$2\sqrt{(t - 2) \cdot \frac{9}{t - 2}} + 4 = 10$, 当且仅当 $t = 5$ 时取等号, 故 $b = 10$.

$2ax^2 + (2 - ab)x - b < 0$ 即为 $ax^2 + (1 - 5a) \cdot x - 5 < 0$ 且 $a > 0$, 所以 $(ax + 1)(x - 5) < 0$, 解得 $-\frac{1}{a} < x < 5$, 故 $B = \left\{x \mid -\frac{1}{a} < x < 5\right\}$.

(3) 由 $A \cap B = A$, 得 $A \subseteq B$.

因为 $2ax^2 + (2 - ab)x - b < 0$,

所以 $(ax + 1)(2x - b) < 0$.

当 $a = 0$ 时, 化为 $2x - b < 0$, 解得 $x < \frac{b}{2}$, 此时不满足 $A \subseteq B$, 舍去;

当 $a > 0$ 时, 解得 $-\frac{1}{a} < x < \frac{b}{2}$ 或 $\frac{b}{2} < x < -\frac{1}{a}$, 此时不满足 $A \subseteq B$, 舍去;

当 $a < 0$ 时, 解得 $x < \frac{b}{2}$ 或 $x > -\frac{1}{a}$,

因为 $A \subseteq B$, 所以 $\begin{cases} -2 < \frac{b}{2} < 0, \\ 0 < -\frac{1}{a} \leq 3, \end{cases}$ 解得 $a \leq$

$-\frac{1}{3}, -4 < b < 0$. 所以 a, b 的取值范围分别

是 $\left\{a \mid a \leq -\frac{1}{3}\right\}, \{b \mid -4 < b < 0\}$.

15.



思路导引

(1) 由 $2x^2 + 5xy + 2y^2 = 2x + y$ 得 $(2x + y)(x + 2y) = 2x + y$,

由 x, y 为正实数得 $x + 2y = 1$; (2) 由 $x + 2y = 1$ 得 $3x + 1 + 6y = 4$, 利用基本不等式求最值即可; (3) 由 $x + 2y = 1$ 得

$\frac{yz}{x} + \frac{z}{xy} + \frac{\sqrt{5}}{z - 1} - 4z = z \left[\frac{y}{x} + \frac{(x + 2y)^2}{xy} - \right.$

$\left. 4 \right] + \frac{\sqrt{5}}{z - 1}$, 化简之后结合基本不等式

求最值即可.

【解】(1) 因为 $2x^2 + 5xy + 2y^2 = 2x + y$, 所以 $(2x + y)(x + 2y) = 2x + y$.

因为 x, y 为正实数, 所以 $2x + y > 0$, 所以 $x + 2y = 1$.

(2) 因为 $x + 2y = 1$, 所以 $3x + 1 + 6y = 4$,

所以 $\frac{3}{3x + 1} + \frac{2}{y} = \frac{3}{3x + 1} + \frac{12}{6y}$

$= \frac{1}{4}[(3x + 1) + 6y] \left(\frac{3}{3x + 1} + \frac{12}{6y} \right)$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} \left[15 + \frac{18y}{3x+1} + \frac{12(3x+1)}{6y} \right] \\
 &\geq \frac{1}{4} \left[15 + 2\sqrt{\frac{18y}{3x+1} \cdot \frac{12(3x+1)}{6y}} \right] \\
 &= \frac{27}{4},
 \end{aligned}$$

$$\text{当且仅当} \begin{cases} \frac{18y}{3x+1} = \frac{12(3x+1)}{6y}, \\ x+2y=1, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} x = \frac{1}{9}, \\ y = \frac{4}{9} \end{cases} \text{时, 等号成立,}$$

所以 $\frac{3}{3x+1} + \frac{2}{y}$ 的最小值为 $\frac{27}{4}$.

(3) 因为 $x+2y=1, z>1$, 所以 $z-1>0$,

$$\begin{aligned}
 &\text{所以} \frac{yz}{x} + \frac{z}{xy} + \frac{\sqrt{5}}{z-1} - 4z \\
 &= z \left(\frac{y}{x} + \frac{1}{xy} - 4 \right) + \frac{\sqrt{5}}{z-1} \\
 &= z \left[\frac{y}{x} + \frac{(x+2y)^2}{xy} - 4 \right] + \frac{\sqrt{5}}{z-1} \\
 &= z \left(\frac{5y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \frac{\sqrt{5}}{z-1} \\
 &\geq z \cdot 2\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{z-1} \\
 &= 2\sqrt{5} \cdot (z-1) + \frac{\sqrt{5}}{z-1} + 2\sqrt{5} \\
 &\geq 2\sqrt{2\sqrt{5}(z-1) \cdot \frac{\sqrt{5}}{z-1}} + 2\sqrt{5} \\
 &= 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5},
 \end{aligned}$$

$$\text{当且仅当} \begin{cases} x+2y=1, \\ \frac{x}{y} = \frac{5y}{x}, \\ 2\sqrt{5}(z-1) = \frac{\sqrt{5}}{z-1}, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} x = 5 - 2\sqrt{5}, \\ y = \sqrt{5} - 2, \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \end{cases} \text{时, 等号成立,}$$

故 $\frac{yz}{x} + \frac{z}{xy} + \frac{\sqrt{5}}{z-1} - 4z$ 的最小值为 $2\sqrt{10} + 2\sqrt{5}$.